

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno, 2017

Bc. Petr Mareček



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY

A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

**DOPORUČENÍ OPTIMÁLNÍHO MÍŘICÍHO BODU PŘI
STŘELBĚ NA TERČ**

LOOKING FOR AN OPTIMAL AIMING POINT IN PLAYING DARTS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Petr Mareček

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Marie Daňková

BRNO 2017



Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor **Telekomunikační a informační technika**

Ústav telekomunikací

Student: Bc. Petr Mareček

ID: 154801

Ročník: 2

Akademický rok: 2016/17

NÁZEV TÉMATU:

Doporučení optimálního mířicího bodu při střelbě na terč

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Pro většinu hráčů šipek není nejlepší strategií mířit na "triple 20". Vytvořte uživatelské rozhraní, které bude sloužit pro doporučení optimálního mířicího bodu při střelbě na terč v závislosti na personalizované parametrizaci hráče. Parametrizaci hráče proveďte automatickým nastavením parametrů pomocí vložení testovacích výsledků hodů daného uživatele. Rozhraní bude mít podobu interaktivního webového apletu.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] Jan Horníček: Optimální korekce nepřesné střelby, bakalářská práce, Brno, FSI VUT v Brně, 2012

[2] R. J. Tibshirani, A. Price and J. Taylor: A statistician plays darts. Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society), 2011.

Termín zadání: 1.2.2017

Termín odevzdání: 24.5.2017

Vedoucí práce: Ing. Marie Daňková

Konzultant:

doc. Ing. Jiří Mišurec, CSc.
předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá doporučením optimálního bodu při střelbě na terč. První část práce obsahuje teoretický rozbor, kde je popsána problematika pravděpodobnosti, rozdělení náhodných veličin a jejich významná rozdělení. V závěru teoretické části je rozebrána Fourierova transformace. Druhá část práce je zaměřena na návrh a implementaci webové aplikace. V rámci návrhu a implementace webové aplikace je využita znalost teorie pro určení optimálního bodu terče.

KLÍČOVÁ SLOVA

terč, rozdělení terče, normální rozdělení, matice, diskrétní konvoluce, optimální bod

ABSTRACT

The thesis deals with recommendation optimal point of dartboard. The first part is theoretical, where is described issue of probability, distribution of variation and significant distribution of variation. At the end of theoretical part is described the Fourier transform. The second part of the thesis deals with the design and implementation of web application. The design and implementation of web application uses the theoretical part for assignment optimal point of dartboard.

KEYWORDS

dartboard, distribution of dartboard, normal distribution, matrix, discrete convolution, optimal point

MAREČEK, Petr *Doporučení optimálního mířícího bodu při střelbě na terč*: diplomová práce. BRNO: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací, 2017. 72 s. Vedoucí práce byl Ing. Marie Daňková

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Doporučení optimálního mířícího bodu při střelbě na terč“ jsem vypracoval(a) samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor(ka) uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil(a) autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl(a) nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom(a) následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

BRNO

.....

podpis autora(-ky)

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucí diplomové práce Ing. Marii Daňkové za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

BRNO

.....

podpis autora(-ky)

OBSAH

Úvod	12
1 Pravidla šipkového sportu	13
1.1 Šipky	13
1.2 Terč	14
1.3 Rozměry hracího pole	15
1.4 Druhy her a jejich pravidla	16
2 Pravděpodobnost	17
2.1 Klasická pravděpodobnost	17
2.2 Náhodné veličiny	17
2.2.1 Rozdělení náhodných veličin	17
2.3 Spojité náhodné veličiny	18
2.3.1 Střední hodnota spojitě náhodné veličiny	19
2.3.2 Rozptyl spojitě náhodné veličiny	19
2.4 Významná spojitá rozdělení pravděpodobnosti	19
2.4.1 Normální (Gaussovo) rozdělení	19
2.4.2 Vícerozměrné normální rozdělení	21
2.4.3 Odhad parametrů normálního rozdělení	23
3 Konvoluce	25
3.1 Diskrétní konvoluce	26
3.2 Dvourozměrná diskrétní konvoluce	26
4 Fourierova transformace	28
4.1 Fourierova transformace pro spojitě signály	28
4.2 Diskrétní Fourierova transformace (Discrete Fourier transform – DFT)	28
4.2.1 Dvourozměrná diskrétní Fourierova transformace	29
4.3 Rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier transform - FFT) . . .	29
4.3.1 Využití algoritmu FFT při výpočtu konvoluce	31
5 Návrh webové aplikace	32
5.1 Rozdělení terče na dílky	32
5.2 Definice dvourozměrného normálního rozdělení	39
5.3 Odhad parametrů a definice dvourozměrného normálního rozdělení . .	43
5.4 Výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce	46

6 Implementace webové aplikace	48
6.1 Rozdělení terče na dílky	49
6.2 Definice parametrů dvourozměrného normálního rozdělení	52
6.3 Odhad parametrů dvourozměrného normálního rozdělení	53
6.4 Definice dvourozměrného normálního rozdělení	55
6.5 Výpočet dvourozměrné diskretní konvoluce	56
6.6 Vykreslení terče a optimálního bodu	58
7 Zhodnocení výsledků	60
7.1 Určení optimálního bodu na základě definovaných směrodatných odchylek	60
7.2 Určení optimálního bodu na základě zadaných souřadnic hodů	62
7.3 Výpočetní a časová náročnost výpočtu optimálního bodu	63
8 Závěr	65
Literatura	66
Seznam symbolů, veličin a zkratk	68
Seznam příloh	69
A Uživatelské rozhraní aplikace	70
B Obsah přiloženého CD	72

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Model šipky [1].	13
1.2	Model terče.	14
1.3	Rozměry hracího pole [3].	15
2.1	Hustota normálního rozdělení [4].	20
2.2	Hustota normálního rozdělení pro různé μ [4].	21
2.3	Hustota normálního rozdělení pro různé σ [4].	21
2.4	Hustota dvourozměrného normálního rozdělení za podmínky $\rho = 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$	22
2.5	Tvar vrstevnice XY za podmínky $\rho = 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$	22
2.6	Hustota dvourozměrného normálního rozdělení za podmínky $\rho > 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$	23
2.7	Tvar vrstevnice XY za podmínky $\rho > 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$	23
3.1	Princip dvourozměrné konvoluce [12].	27
5.1	Zobrazení polárních souřadnic pro segment o bodové hodnotě 4.	33
5.2	Rozdělení segmentu SB a DB na dílky.	34
5.3	Rozdělení segmentu DB na dílky.	35
5.4	Rozložení matice obsahující bodové hodnoty terče.	36
5.5	Určení souřadnic dílku pro hranici terče.	37
5.6	Určení bodové hodnoty dílku v závilsloti na souřadnicích.	38
5.7	Normální rozdělení pro $\sigma_x = \sigma_y = 3$ mm a $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$	40
5.8	Rozložení matice obsahující hodnoty dvourozměrného normálního roz- dělení pro $\sigma_x = \sigma_y = 3$ mm a $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$	41
5.9	Normální rozdělení pro $\sigma_x = 3$ mm, $\sigma_y = 2$ mm a $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$	42
5.10	Znázornění terče a kartézské soustavy souřadnic.	43
6.1	Adresářová struktura aplikace.	49
6.2	Komponenta pro zadání velikosti dílku.	49
6.3	Kontrola zadané hodnoty pro velikost dílku.	50
6.4	Kvadranty terče a souřadnice pole v rámci kódu.	51
6.5	Ukázka pole bodových hodnot terče.	52
6.6	Komponenta pro definici parametrů dvourozměrného normálního roz- dělení.	53
6.7	Komponenta pro zadání vlastních dat.	54
6.8	Odhadnuté parametry pro data z tab. 5.3.	54
6.9	Ukázka pole dvourozměrného normálního rozdělení.	56
6.10	Komponenta pro výpočet dvourozměrné diskretní konvoluce.	56
6.11	Ukázka překrytí matic při výpočtu dvourozměrné diskretní konvoluce.	57

6.12	Vykreslení výsledku výpočtu optimálního bodu terče pro parametry normálního rozdělení $\mu_x = \mu_y = 0$, $\sigma_x = 24$ mm a $\sigma_y = 12$ mm.	59
7.1	Výsledky výpočtu optimálního bodu pro $\sigma_x < 17$ mm a $\sigma_y < 17$ mm.	60
7.2	Výsledky výpočtu optimálního bodu pro $\sigma_x > 17$ mm a $\sigma_y > 17$ mm.	61
7.3	Zobrazení výsledků pro určení optimálního bodu, viz [19].	62
7.4	Vykreslení optimálního bodu pro odhadnuté parametry normálního rozdělení z hodnot uvedených v tab. 7.1.	63
A.1	Uživatelské rozhraní aplikace (User interface - UI).	70
A.2	Uživatelské rozhraní aplikace (User interface - UI).	71

SEZNAM TABULEK

5.1	Polární souřadnice pro segment o bodové hodnotě 4.	34
5.2	Polární souřadnice pro segment o bodové hodnotě 18.	39
5.3	Příkald souřadnic nastřílených hodnot.	44
7.1	Příkald souřadnic nastřílených hodnot.	62

ÚVOD

Práce se zabývá doporučením optimálního bodu při střelbě na terč, konkrétně při střelbě na terč v šipkovém sportu. V 1. kapitole jsou uvedena základní pravidla šipkového sportu. Kapitola se také zabývá potřebným vybavením pro činnost tohoto sportu. V dalších kapitolách je rozebrána teorie, která je nezbytná pro pochopení 5. a 6. kapitoly.

Výsledkem práce je webová aplikace, která provádí výpočet a určení optimálního bodu terče. Pro výpočet je aplikována dvourozměrná diskrétní konvoluce. Je tedy nutné definovat dvě matice, mezi kterými se výpočet provede. Jednu z matic tvoří konvoluční maska. Tato matice obsahuje hodnoty dvourozměrného normálního rozdělení. Před definováním tohoto rozdělení musí být pochopena problematika pravděpodobnosti a rozdělení náhodných veličin. Dále je nutné ovládat také znalosti pro jednorozměrné normální rozdělení. Problematickou pravděpodobnosti, rozdělení náhodných veličin a jejich významných rozdělení se zabývá 2. kapitola.

Dvourozměrné normální rozdělení počítá se spojitými náhodnými veličinami. Výpočet bude ale proveden pomocí výpočetní techniky. Dané rozdělení bude tedy diskretizováno a další teorie bude zaměřena na problematiku diskrétních veličin.

Aby bylo možné provést výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce, musí být vysvětlena základní problematika konvoluce. Ve 3. kapitole je tedy uvedena kromě dvourozměrné diskrétní konvoluce také jednorozměrná diskrétní konvoluce. Výpočtem dvourozměrné diskrétní konvoluce se získá nová matice vážených průměrů. Nejvyšší hodnota této nové matice pak ukazuje na optimální bod terče.

Výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce je velice časově náročný. Lze tedy využít přepočtu matic na Fourierovy obrazy pomocí diskrétní Fourierovy transformace. Tím se výpočet usnadní pouze na vynásobení těchto Fourierových obrazů. Samotný výpočet diskrétní Fourierovy transformace je ale také velice časově náročný. Proto je ve 4. kapitole popsán také algoritmus rychlé Fourierovy transformace, který výpočet diskrétní Fourierovy transformace usnadní. Nakonec se může aplikovat postup rychlé konvoluce, která je také v této kapitole vysvětlena.

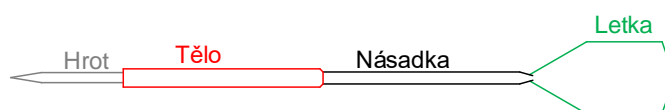
Výše uvedená teorie je aplikována v 5. a 6. kapitole. Tyto kapitoly se zabývají návrhem a implementací webové aplikace pro určení optimálního bodu terče. V rámci návrhu je popsán model terče a jeho rozdělení na dílky. Dále je uvedena definice dvourozměrného normálního rozdělení. Parametry tohoto rozdělení je možné také odhadnout na základě vložených nastřílených hodnot daného uživatele, proto jsou v návrhu aplikace uvedeny dané dohady parametrů. Poslední část návrhu se zabývá výpočtem dvourozměrné diskrétní konvoluce. Návrh webové aplikace je poté uveden do praxe a implementován v programovacím jazyku JavaScript.

1 PRAVIDLA ŠIPKOVÉHO SPORTU

Pro činnost šipkového sportu jsou nezbytné šipky, terč, znalost rozměrů hracího prostoru a druhy her a jejich pravidla.

1.1 Šipky

Šipka se skládá z hrotu, těla, násadky a letky. Model šipky je uveden na obr. 1.1. Minimální délka šipky musí být 60 mm a maximální hmotnost 30 g [1].



Obr. 1.1: Model šipky [1].

Hroty

Existují dva druhy hrotů. Prvním z nich je plastový hrot, který se používá při hoďu na elektrický terč. Šipky s plastovým hrotem se označují pojmem SOFT. Druhý hrot je kovový a používá se při hoďu na sisalový terč. Šipky s tímto hrotem se označují pojmem STEEL. Používané hmotnosti šipek jsou 14 - 18 g pro SOFT šipky a 21 - 30 g pro STEEL šipky.

Tělo

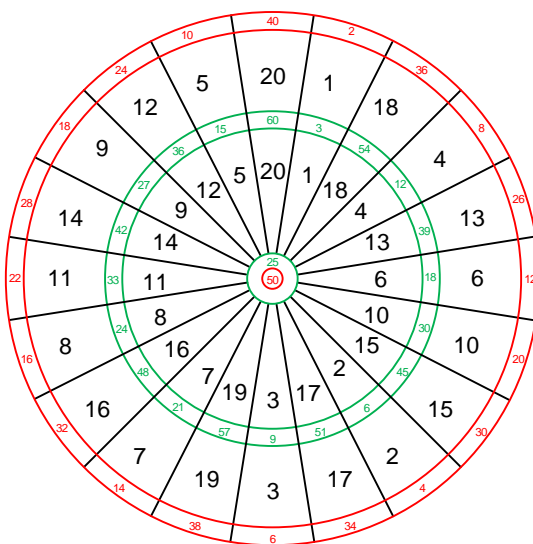
K výrobě těla se dnes používá mosaz, slitina niklu a stříbra a slitina niklu a wolframu. Mosazné tělo je lehké, ale větší. Šipky s mosazným tělem jsou vhodné pro začátečníky. Pro pokročilejší a profesionální hráče je vhodnější slitina niklu a stříbra nebo slitina niklu a wolframu, která je nejtěžší a má nejmenší tělo. Proto je možné do malého prostoru terče umístit více šipek. Důležitý je také tvar těla šipky. Rozlišují se tři základní tvary:

- Barrel: těžiště je uprostřed a největší váha je soustředěná u těžiště,
- Torpedo: těžiště je vpředu,
- Straight: těžiště je uprostřed a váha je rozložena rovnoměrně po celé délce.

U násadky je důležitý materiál, podle kterého se odvíjí její hmotnost. Násadky mohou být plastové, hliníkové, titanové a kombinované. Podle materiálu se hmotnost násadky pohybuje v rozmezí 0,7 - 2,8 g. Poslední součástí šipky je letka. Na výrobu letek se používají polyestery, nylonové a další jiné plastové fólie [1].

Popis

Terč se skládá z dvaceti stejných výsečí, kde každá je rozdělena na čtyři segmenty. Střed terče je dvojitý a skládá se ze dvou kruhů. Model terče je uveden na obr. 1.2. Hrací pole terče tedy tvoří 82 segmentů. Vnitřní část středu se nazývá Double Bulleyes (DB) a vnější část se nazývá Single Bulleyes (SB). Hodnoty výsečí jsou bodově rozděleny od 1 do 20 bodů. Hodnota segmentu SB činí 25 bodů a hodnota segmentu DB 50 bodů. Výseč o hodnotě 20 bodů je kolmá k vodorovné ose terče. Ostatní bodové hodnoty terče jsou pak rozděleny po směru hodinových ručiček v následujícím pořadí: 1, 18, 4, 13, 6, 10, 15, 2, 17, 3, 19, 7, 16, 8, 11, 14, 9, 12, 5. Druhý segment výseče, počítáno od středu, má trojnásobnou hodnotu bodové hodnoty dané výseče. Poslední segment výseče má dvojnásobnou hodnotu bodové hodnoty dané výseče [2].



Obr. 1.2: Model terče.

Rozměry

Rozměry všech výsečí musí být shodné. Průměr terče je 340 mm. Segment DB má průměr 12 mm a průměr segmentu SB je 32 mm. Poloměr, bráný od středu terče po konec segmentu trojnásobné bodové hodnoty, činí 107 mm. Výška druhého a čtvrtého segmentu je 10 mm. Hodnoty se liší podle výroby ± 2 mm.

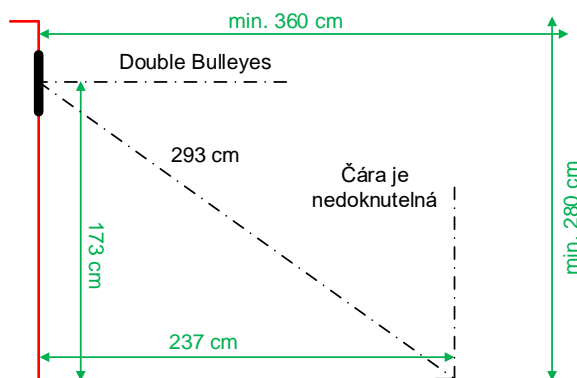
Rozdělení

Existují dva typy terčů. Prvním z nich je elektronický terč. Tento terč obsahuje k dosažení bodové hodnoty otvor, do kterého hrot šipky zapadá. Na tomto terči bývá od výrobce přednastaveno několik druhů her. Odečet bodů a pravidla her obsluhuje elektronika [1].

Dále existuje sisalový terč. Sisalový terč je vyroben ze štětin rostliny Agave sisalana, která roste v Africe a Jižní Americe. Tyto štětiny se také používají k výrobě lan a provazů. Dlouhá a tenká vlákna se stočí do soustředných kruhů. Dále se poskládají do oválné formy a slisují se. Nakonec se terč vybrousí a obarví. Tyto terče jsou kvalitní a především trvanlivé. Dodržení správných pravidel jednotlivých her si musí zajistit hráči sami.

1.3 Rozměry hracího pole

Rozměry hracího pole jsou uvedeny na obr. 1.3. Čára hodu je vzdálená od terče 237 cm. Odhodová čára musí být pevně vyznačena a pro hráče je nedotknutelná. Hráč musí stát v daném hracím prostoru a nesmí překročit linii čáry hodu. Střed terče je ve výšce 173 cm po kolmici od podkladu, na kterém stojí terč [3].



Obr. 1.3: Rozměry hracího pole [3].

1.4 Druhy her a jejich pravidla

Hází se třemi šípkami. Za jedno kolo může hráč tedy házet třikrát. Hra se skládá z několika kol, dokud jeden z hráčů nesplní všechny podmínky hry a tím vyhraje. Jedna hra se nazývá leg. Zápas je pak tvořen jedním nebo více legy. V elektronických šípkách je výběr her rozsáhlejší. Mezi nejznámější hry patří X01, kde X značí číslice 3, 5 a 7 [1].

V následujícím textu je popsána hra 501. Všichni hráči mají na začátku hry 501 bodů. Každý hráč v jednom kole hází tři šípky. Naházené body se odečtou od stávajících bodů. Hráči se v každém kole střídají. Hra je ukončena, pokud jeden z hráčů nahází tolik bodů, aby po odečtení od stávajících bodů zbylo 0 bodů. Pokud hráč hodí více bodů než je jeho stávající bodový přínos, pak hráči zůstává stejný počet bodů, jako na začátku daného kola. Každá hra má většinou počáteční a konečnou podmínku, konkrétně se jedná o DOUBLE IN a DOUBLE OUT. Pokud chce hráč zahájit hru, musí na první šípkou trefit čtvrtý segment jakéhokoliv bodového segmentu. Stejným způsobem se také hra ukončuje, kdy hráč musí poslední šípkou trefit opět čtvrtý segment jakéhokoliv bodového segmentu. Hra se může také zahájit a ukončit hozením jakéhokoliv segmentu.

2 PRAVDĚPODOBNOST

2.1 Klasická pravděpodobnost

Pravděpodobnost se používá při pokusu, u kterého je n možných výsledků. Pokud je prováděn nějaký pokus, u kterého je n možných výsledků, pak je většinou kladena otázka, jaká je šance, že nastane některý určitý výsledek z n možných výsledků. Jinak řečeno, jedná se o poměr počtu možností příznivých danému výsledku k počtu všech možných výsledků. Při počítání pravděpodobností se pracuje s náhodnými jevy, které se značí velkými písmeny, např. (A, B, \dots) . Náhodný jev je podmnožina množiny všech možných n výsledků určitého pokusu. Pokud náhodný jev zahrnuje všechny výsledky pokusu, jedná se o tzv. jistý jev. Pravděpodobnost jevu A se označuje $P(A)$. Musí platit, že součet všech hodnot pravděpodobností náhodného jevu A musí být roven 1 a zároveň musí být splněna podmínka $0 \leq P(A) \leq 1$. Pravděpodobnost $P(A)$ je dána vztahem: [4]

$$P(A) = \frac{\text{počet možností příznivých jevu } A}{\text{počet všech možností}} \quad (2.1)$$

2.2 Náhodné veličiny

Jak již bylo zmíněno v kap. 2.1, náhodné veličiny se značí velkým písmenem. Veličina X se nazývá náhodnou veličinou, pokud její hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného procesu [4].

2.2.1 Rozdělení náhodných veličin

Náhodné veličiny se rozdělují na diskrétní náhodné veličiny a spojité náhodné veličiny. Diskrétní náhodné veličiny nabývají pouze hodnot z určité konečné množiny. Například při hození na terč popisují bodovou hodnotu, do které šipka dopadla. Naproti tomu spojitá náhodná veličina může nabývat nespočetně mnoho hodnot z určitého intervalu [4].

Dále v textu (viz kap. 5.1) je uveden matematický popis terče, kde je uvedeno, že bodové hodnoty terče jsou popsány pomocí polárních souřadnic a každý sektor terče může být rozdělen na více hodnot. Počítá se tak, že šipka může dopadnout kamkoliv na terč a nebere se v potaz pouze bodová hodnota sektoru, kam šipka dopadla. Proto je dále popsána pouze spojitá náhodná veličina.

2.3 Spojité náhodné veličiny

Jak bylo uvedeno v kap. 2.2.1, mezi spojité náhodné veličiny patří veličiny, které mohou nabývat nespočetně mnoha hodnot. Pokud vezmeme v potaz sisalový terč, může šipka dopadnout na nespočet možných míst. Náhodná veličina X se nazývá spojitá, jestliže platí vztah: [4]

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.2)$$

Funkce $f(x)$ se nazývá hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X . Obsah plochy pod průběhem funkce musí být $f(x)$ roven 1: [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (2.3)$$

Ze vztahu 2.2 je na první pohled patrná jedna základní vlastnost. Jaká je pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina se bude rovnat jedné konkrétní hodnotě z daného intervalu? Pravděpodobnost této veličiny bude vždy nulová: [4]

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0. \quad (2.4)$$

Důvod tohoto výsledku je jednoduchý. U spojitých náhodných veličin se počítá s obrovským množstvím hodnot z daného intervalu, a proto pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina bude rovna právě konkrétní hodnotě, je nulová. Pokud by však pro vybrané a byla počítána pravděpodobnost, že X bude v rozmezí $a \pm 0,0001$, výsledek by pak nulový být nemusel.

Další užitečnou funkcí pro práci se spojitými náhodnými veličinami je funkce distribuční $F(x)$, která je definována vztahem: [4]

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (2.5)$$

Tento vztah udává, že hodnota funkce $F(x)$ v bodě x je rovna pravděpodobnosti, že spojitá náhodná veličina X bude menší nebo rovna x . Konkrétně se jedná o hodnoty z intervalu $(-\infty, x]$. U spojitých náhodných veličin je distribuční funkce $F(x)$ spojitá a definována jako: [4]

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (2.6)$$

Na první pohled je patrný vztah mezi distribuční funkcí $F(x)$ a hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Pokud je známá hustota pravděpodobnosti $f(x)$, pak distribuční funkce $F(x)$ se vypočítá jako integrace hustoty pravděpodobnosti, viz 2.6. Stejným způsobem lze vypočítat hustotu pravděpodobnosti $f(x)$, pokud je známá distribuční funkce $F(x)$, pak hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ vypočteme jako její derivaci:

$$f(x) = F'(x). \quad (2.7)$$

2.3.1 Střední hodnota spojité náhodné veličiny

Obecně je střední hodnota náhodné veličiny určitý vážený průměr všech možných hodnot náhodné veličiny X . Střední hodnota spojité náhodné veličiny X se značí EX a je definována vztahem: [4]

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (2.8)$$

kde x zastupuje danou hodnotu náhodné veličiny X a $f(x)$ je funkční hodnota v bodě x .

2.3.2 Rozptyl spojité náhodné veličiny

Rozptyl určuje, jak moc jsou hodnoty náhodné veličiny rozptýleny kolem střední hodnoty EX . U spojitých náhodných veličin se rozptyl náhodné veličiny X značí DX a je definován jako: [4]

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (EX)^2, \quad (2.9)$$

kde x a $f(x)$ mají stejný význam jako v předchozím vztahu pro střední hodnotu 2.8.

2.4 Významná spojitá rozdělení pravděpodobnosti

Rozdělení každé náhodné veličiny udává, jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina bude mít právě danou hodnotu. Pro spojitou náhodnou veličinu existuje mnoho rozdělení. Mezi nejznámější rozdělení patří: [4]

- normální (Gaussovo) rozdělení,
- logaritmicko-normální rozdělení,
- rovnoměrné rozdělení,
- exponenciální rozdělení,
- Cauchyho rozdělení.

Nejvýznamnějším spojitým rozdělením je rozdělení normální, známé také jako Gaussovo rozdělení. V praktické části práce se pracuje právě s tímto rozdělením, proto je také dále v textu (viz kap. 2.4.1) toto rozdělení podrobněji probráno.

2.4.1 Normální (Gaussovo) rozdělení

Pomocí normálního rozdělení je možné popsat náhodné veličiny, které jsou ovlivněny velkým množstvím nepatrných, navzájem nezávislých faktorů. Například při hodu šipky na terč. Trajektorie šipky je ovlivněna několika faktory. Záleží na druhu šipky, na její hmotnosti, výrobním materiálu a jiných faktorech. Také záleží na podmínkách

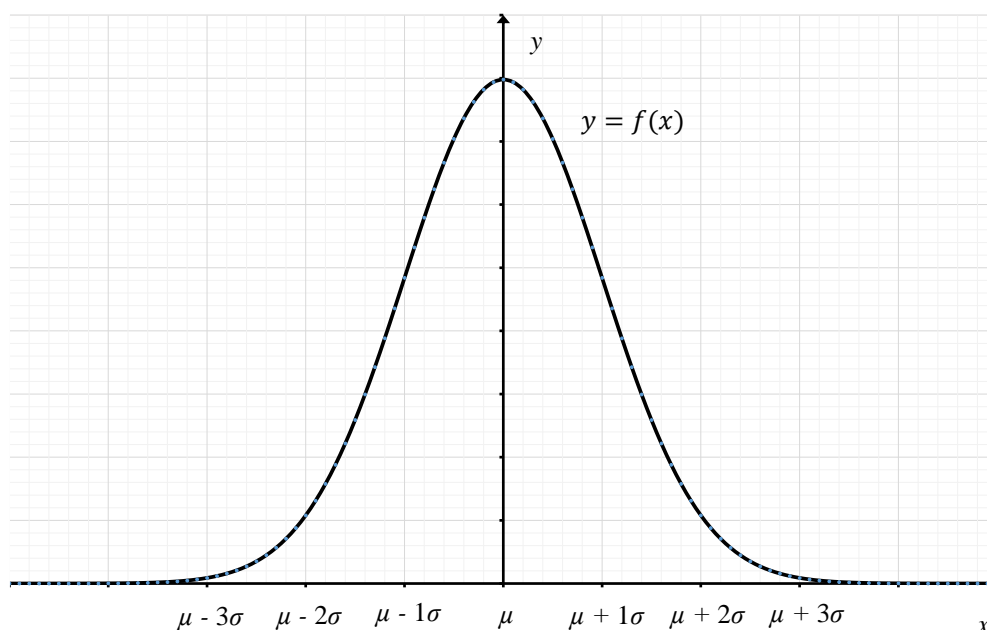
okolního prostředí např. větrných podmínkách. V neposlední řadě je také nutné zvážit fyzické vlastnosti hráče. To vše má vliv na trajektorii šipky [4].

Hustota normálního rozdělení, neboli Gaussova funkce $f(x)$, je definována vztahem: [4]

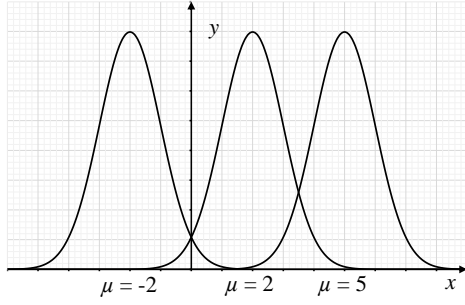
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}, \quad (2.10)$$

kde μ je střední hodnota a σ směrodatná odchylka. Ve střední hodnotě μ nabývá křivka svého maxima a zároveň je kolem této hodnoty souměrná. Směrodatná odchylka σ určuje tvar křivky. Se stoupající velikostí směrodatné odchylky σ maximum křivky klesá v důsledku podmínky, že plocha pod křivkou je rovna 1. Závislost střední hodnoty μ a směrodatné odchylky σ na posunu a tvaru křivky je zobrazena na obr. 2.2 a obr. 2.3.

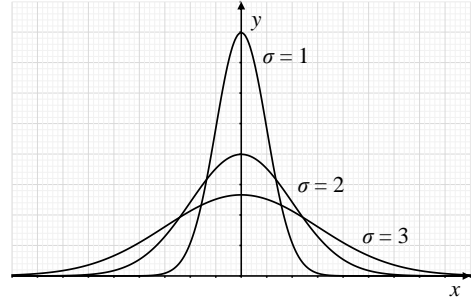
Hustota normálního rozdělení má tvar Gaussovy funkce, viz obr. 2.1. Funkce $f(x)$ je kladná pro všechna reálná x . Veškeré hodnoty náhodné veličiny patřící do intervalu $\mu \pm 3\sigma$ tvoří 99,7 % všech hodnot. Poté v rozmezí $\mu \pm 2\sigma$ se vyskytuje 95,5 % všech hodnot a v rozmezí $\mu \pm 1\sigma$ pak 68,3%. Pro hodnoty větší jak $\mu \pm 3\sigma$ už křivka téměř splývá s osou x . Jedná se o tzv. pravidlo tří sigma.



Obr. 2.1: Hustota normálního rozdělení [4].



Obr. 2.2: Hustota normálního rozdělení pro různé μ [4].



Obr. 2.3: Hustota normálního rozdělení pro různé σ [4].

2.4.2 Vícerozměrné normální rozdělení

Hustota vícerozměrného normálního rozdělení pro náhodný vektor \mathbf{x} je definována vztahem: [5]

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi) \cdot p \cdot |\Sigma|}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mu)\right)}, \quad (2.11)$$

kde μ je vektor středních hodnot náhodných veličin, $|\Sigma|$ determinant kovarianční matice náhodných veličin a p určuje počet náhodných veličin [5].

Kovarianční matice vyjadřuje vzájemnou závislost náhodných veličin. Například pro dvě náhodné veličiny X a Y bude mít kovarianční matice tvar $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$. Jedná se o čtvercovou matici, která je symetrická podle diagonály. Na diagonále jsou uvedeny rozptyly σ_x^2 a σ_y^2 . Mimo diagonálu je pak uvedena kovariance σ_{xy} , která je definována jako:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) \cdot (y_i - \mu_y), \quad (2.12)$$

kde x a y jsou hodnoty náhodných veličin X a Y .

Dvourozměrné normální rozdělení je speciálním případem vícerozměrného normálního rozdělení. Pro dvě náhodné veličiny X a Y , které mají střední hodnoty μ_x a μ_y , rozptyly σ_x^2 a σ_y^2 a kovarianci σ_{xy} , je kovarianční matice $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$, vektor středních hodnot $\mu = (\mu_x, \mu_y)^T$ a $p = 2$. Pak hustota dvourozměrného normálního rozdělení je definována jako: [5]

$$f(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{Q(x, y)}{2 \cdot (1 - \rho^2)}\right)}, \quad (2.13)$$

$$Q(x, y) = \left[\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2 \cdot \rho \cdot (x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}} \right], \quad (2.14)$$

kde ρ je koeficient korelace, který je definován vztahem:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (2.15)$$

Ze vztahů 2.13 a 2.14 je možné určit také marginální hustoty náhodných veličin X a Y . Marginální hustota je rovna hustotě normálního rozdělení. Například marginální hustota náhodné veličiny X je rovna hustotě normálního rozdělení náhodné veličiny X , viz vztah 2.10. Pro marginální hustoty náhodných veličin X a Y tedy platí: [6]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}, \quad (2.16)$$

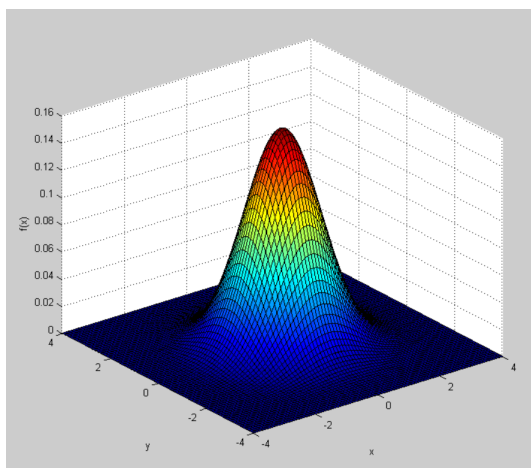
,

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(y-\mu_y)^2}{2 \cdot \sigma_y^2}}. \quad (2.17)$$

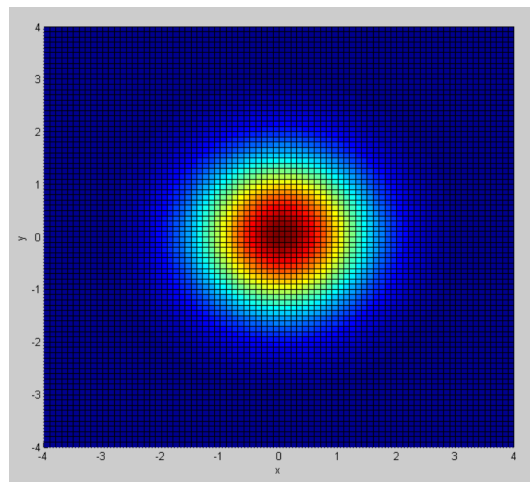
Na základě koeficientu korelace pak lze určit vzájemnou závislost či nezávislost náhodných veličin X a Y . Pokud je $\rho = 0$, jsou náhodné veličiny X a Y vzájemně nezávislé a platí:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y). \quad (2.18)$$

Jinak řečeno pokud je $\rho = 0$, má vrstevnice XY hustoty dvourozměrného normálního rozdělení tvar kružnice, viz obr. 2.5. Tvar hustoty dvourozměrného normálního rozdělení, za podmínky $\rho = 0$, je na obr. 2.4.



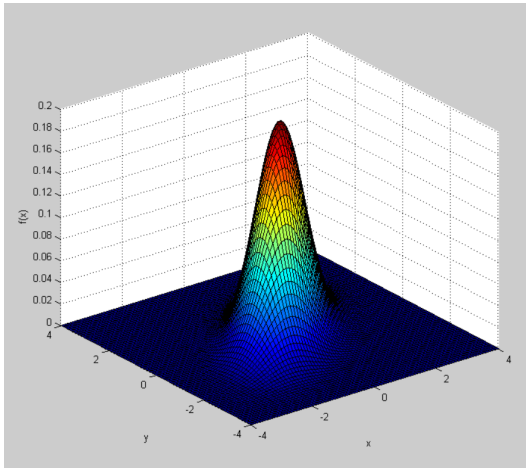
Obr. 2.4: Hustota dvourozměrného normálního rozdělení za podmínky $\rho = 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.



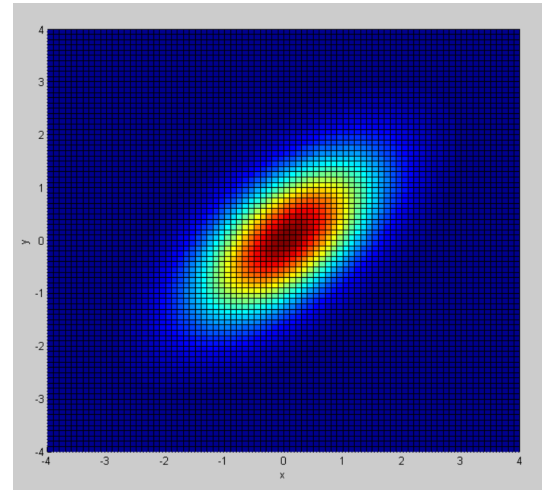
Obr. 2.5: Tvar vrstevnice XY za podmínky $\rho = 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.

Náhodné veličiny X a Y jsou vzájemně závislé, pokud $\rho \neq 0$. Tvar vrstevnice XY hustoty dvourozměrného normálního rozdělení má za této podmínky tvar elipsy,

viz obr. 2.7. Tvar hustoty dvourozměrného normálního rozdělení za této podmínky je na obr. 2.6. Je-li tedy $\rho < 0$, pak jsou náhodné veličiny záporně závislé a je-li $\rho > 0$, jsou kladně závislé. Na obr. 2.7 je znázorněn tvar elipsy pro kladnou závislost náhodných veličin. Pokud jsou hodnoty x a y náhodných veličin X a Y stejné, tvoří jejich závislost stoupající přímka. Při záporné závislosti náhodných veličin přímka klesá [6].



Obr. 2.6: Hustota dvourozměrného normálního rozdělení za podmínky $\rho > 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.



Obr. 2.7: Tvar vrstevnice XY za podmínky $\rho > 0$ a pro rozptyly $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.

2.4.3 Odhad parametrů normálního rozdělení

Dvourozměrné normální rozdělení je definováno pro dvě náhodné veličiny. Postup odhadu parametrů středních hodnot a směrodatných odchylek je pro obě náhodné veličiny stejný. Proto je dále postup vysvětlen pro normální rozdělení náhodné veličiny X . Odhad parametrů normálního rozdělení je jednou z úloh matematické statistiky. Parametry není možné určit přesně, proto se mluví o odhadu parametrů. Pro normální rozdělení náhodné veličiny X se odhaduje střední hodnota μ_x a rozptyl σ_x^2 . Rozlišují se dva základní druhy odhadů: [7]

- bodové odhady,
- intervalové odhady.

V praktické části této práce (viz kap. 5 a 6) se parametry dvourozměrného normálního rozdělení odhadují pomocí bodových odhadů parametrů. Proto v této podkapitole budou dále uvedeny pouze bodové odhady parametrů.

Bodové odhady

Pro bodové odhady parametrů se nejčastěji používá metoda maximální věrohodnosti. Pomocí této metody lze vyjádřit vztah pro výpočet odhadu střední hodnoty μ_x náhodné veličiny X : [8]

$$\mu_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.19)$$

kde x_i jsou náhodně vybrané hodnoty z normálního rozdělení náhodné spojité veličiny X . Proměnná n udává počet náhodně vybraných hodnot z normálního rozdělení.

Druhým parametrem, který lze pomocí metody maximální věrohodnosti vyjádřit, je rozptyl σ_x^2 náhodné veličiny X . Vztah pro výpočet odhadu rozptylu je definován:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2, \quad (2.20)$$

kde μ_x je odhadnutá střední hodnota náhodné veličiny X .

Stejný postup se také aplikuje pro normální rozdělení náhodné veličiny Y . Po odhadnutí středních hodnot μ_x , μ_y a rozptylů σ_x^2 , σ_y^2 je možné odhadnout korelaci náhodných veličin X a Y podle vztahů 2.12 a 2.15.

3 KONVOLUCE

Konvoluce je matematická operace dvou signálů. Používá se pro zpracování signálů, v teorii pravděpodobnosti, statistice, při zpracování obrazu a v dalších technických oborech. Obecně se konvoluce popisuje při zpracování signálů. Lze jí aplikovat pro spojité i diskrétní signály. Konvoluce dvou spojitých signálů je definována jako: [9]

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Funkce $x_2(t)$ se nazývá konvoluční jádro. Konvoluce je rovna integrálu ze součinu vstupní funkce $x_1(t)$ a otočené funkce konvolučního jádra posunuté do bodu t [9].

Při počítání konvoluce, pro spojité i diskrétní signály, platí následující zákony:

- komutativní zákon: [9]

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t), \quad (3.2)$$

- distributivní zákon: [9]

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t), \quad (3.3)$$

- asociativní zákon: [9]

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t), \quad (3.4)$$

- zákon o posunu v čase, pokud $x_1(t) * x_2(t) = c(t)$, pak: [9]

$$x_1(t) * x_2(t - T) = c(t - T) \quad (3.5)$$

$$x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T) \quad (3.6)$$

$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2). \quad (3.7)$$

Jak je popsáno v kap. 5, v této práci je použita dvourozměrná diskrétní konvoluce pro operaci mezi dvěma maticemi. První matice je složena z hodnot terče, které jsme získali z matematického popisu terče. Druhá matice se skládá z hodnot dvourozměrného normálního rozložení, které se získali stejným postupem jako při odvozování hodnot terče. Proto dále bude popsána pouze diskrétní konvoluce a dvourozměrná diskrétní konvoluce.

3.1 Diskrétní konvoluce

Konvoluce pro diskrétní signály je definována podobně jako pro spojité signály: [10]

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m). \quad (3.8)$$

V reálných podmínkách se však počítá s konečnými signály, a proto se vztah 3.8 upraví do tvaru: [10]

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m) \cdot x_2(n-m), \quad (3.9)$$

kde n určuje pořadový index počítaného vzorku výstupní posloupnosti a m určuje pořadový index vstupní posloupnosti. Podobně jako u vztahu pro spojitý signál (viz 3.1) platí, že $x_1(n)$ je vstupní posloupnost a posloupnost $x_2(n)$ tvoří konvoluční jádro. Pokud má vstupní posloupnost délku N_1 a konvoluční jádro délku N_2 , potom délka výstupní posloupnosti je dána vztahem: [11]

$$N_x = N_1 + N_2 - 1 \quad (3.10)$$

Pokud jsou dány například signály $x_1(n) = \{x_{10}, x_{11}\}$ a $x_2(n) = \{x_{20}, x_{21}\}$, pak jejich konvoluce $x(n)$ se počítá podle daného schéma: [10]

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \begin{pmatrix} x_{10} \cdot x_{20} & x_{10} \cdot x_{21} \\ x_{11} \cdot x_{20} & x_{11} \cdot x_{21} \end{pmatrix}$$

součet dílčích součinů

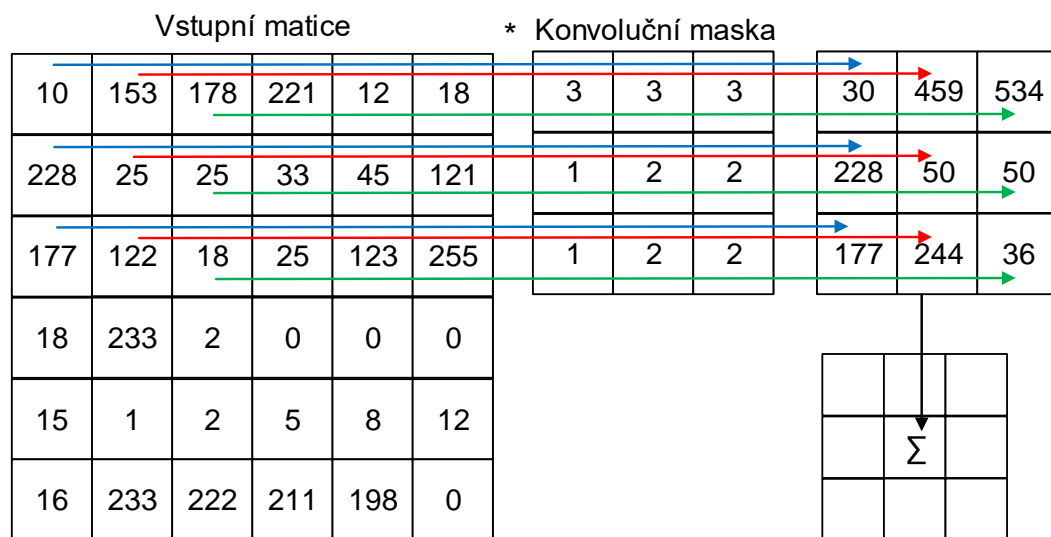
3.2 Dvourozměrná diskrétní konvoluce

Dvourozměrná diskrétní konvoluce se používá v počítačové grafice při zpracování dvourozměrného obrazu. Jedná se o matematickou operaci mezi dvěma maticemi a je definována vztahem: [12]

$$y(m, n) = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k x(m-i, n-j) \cdot z(i, j). \quad (3.11)$$

Konvoluční jádro z , zde zastupuje konvoluční masku, která je položena na daná pole vstupní matice x . Překrytá pole daných matic se mezi sebou vynásobí a jednotlivé součiny se poté sečtou. Tím se získá tzv. vážený průměr ze všech polí vstupní matice, která jsou překrytá maticí konvoluční masky. Postupně se konvoluční maska

posouvá po celé vstupní matici. Získá se pak nová matice s váženými průměry z celé vstupní matice. Pokud je střed matice konvoluční masky vložen na první pole vstupní matice, je vstupní matice doplněna nulami. Příklad překrytí matic a výpočet je na obr. 3.1. Existují speciální konvoluční masky například pro rozostření obrazu, jeho zaostření nebo pro detekci hran obrazu.



Obr. 3.1: Princip dvourozměrné konvoluce [12].

4 FOURIEROVA TRANSFORMACE

Výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce je možné urychlit pomocí algoritmu rychlé Fourierovy transformace (Fast Fourier transform – FFT). Pro pochopení této transformace je nezbytná znalost Fourierovy transformace pro spojité a diskrétní signály.

4.1 Fourierova transformace pro spojité signály

Fourierova transformace je používána pro převedení signálu z časové oblasti do kmitočtové oblasti, tedy $f(t) \rightarrow F(\omega)$. Signál je pak možné analyzovat na základě jeho spektra. Transformace je také možná v opačném směru z oblasti kmitočtové do oblasti časové ($F(\omega) \rightarrow f(t)$), tzv. inverzní (zpětná) Fourierovy transformace spojitěho signálu. Jedná se o základní operace při analýze signálů. Vztahy pro výpočet Fourierovy transformace a inverzní Fourierovy transformace pro spojité signály jsou definovány jako: [13]

$$f(t) \rightarrow F(\omega) : F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt, \quad (4.1)$$

$$F(\omega) \rightarrow f(t) : f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega \cdot t} d\omega. \quad (4.2)$$

4.2 Diskrétní Fourierova transformace (Discrete Fourier transform – DFT)

Ve většině případů se pro zpracování spojitých signálů používá výpočetní technika, která pracuje pouze s diskrétními hodnotami. Proto jsou všechny spojité signály pomocí vzorkování převedeny na diskrétní signály. Tomuto kroku se říká také diskretizace. Při ideálním vzorkování je spojitý signál převeden na posloupnost hodnot diskrétního signálu. V podstatě je integrál nahrazen sumou. Pomocí diskrétní Fourierovy transformace získáme k časové posloupnosti $f(n)$ o konečné délce N posloupnost spektra $F(k)$ také o konečné délce N . Diskrétní Fourierova transformace (DFT) a inverzní diskrétní Fourierova transformace (IDFT) je definována: [13]

$$f(n) \rightarrow F(k) : F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.3)$$

$$F(k) \rightarrow f(n) : f(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

kde n určuje index posloupnosti a N počet prvků posloupnosti.

4.2.1 Dvourozměrná diskrétní Fourierova transformace

Dvourozměrnou diskrétní Fourierovu transformaci je možné chápat jako použití dvou jednorozměrných transformací. Nejprve se diskrétní Fourierova transformace použije pro všechny řádky matice a tím vznikne matice nová. Poté se provede výpočet diskrétní Fourierovy transformace pro sloupce nové matice. Vztahy pro dvourozměrnou diskrétní Fourierovu transformaci a inverzní dvourozměrnou diskrétní Fourierovu transformaci jsou definovány: [14, 13]

$$F[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[n_1, n_2] \cdot e^{-j \cdot k_1 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N_1} \cdot n_1} \cdot e^{-j \cdot k_2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N_2} \cdot n_2}, \quad (4.5)$$

pro $k_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$ a $k_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$,

$$f[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \cdot \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} F[k_1, k_2] \cdot e^{j \cdot k_1 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N_1} \cdot n_1} \cdot e^{j \cdot k_2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N_2} \cdot n_2}, \quad (4.6)$$

pro $n_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$ a $n_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$.

Tato transformace se často používá pro zpracování obrazu, například při restaurování obrazu, pro lepší kvalitu zobrazení nebo pro segmentaci obrazu.

4.3 Rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier transform - FFT)

Výpočet diskrétní Fourierovy transformace není pro praktické příklady příliš vhodný kvůli časové náročnosti. Náročnost výpočtu roste se čtvercem hodnot posloupností, tj. $O(N^2)$. Pokud je počet hodnot vstupní posloupností $f(n)$ roven $N = 4$, pak výstupní posloupnost $F(k)$ také bude obsahovat čtyři hodnoty, tj. $N = 4$. Avšak při výpočtu každé hodnoty výstupní posloupnosti je nutné spočítat sumu o čtyřech prvcích, tj. součet čtyř hodnot. Náročnost příkladu je tedy rovna $O(4^2) = O(16)$. Pokud by ale hodnota posloupnosti byla například $N = 1000$, pak náročnost bude rovna $O(1000^2) = O(1000000)$. Například při zpracování obrazu se pracuje s maticemi, tedy dvourozměrnou vstupní posloupností, které obsahují například 1920×1080 hodnot. Výpočet diskrétní Fourierovy transformace pro tento příklad by byl velice zdoluhavý. Proto se zavedl rychlejší algoritmus, který se nazývá rychlá Fourierova transformace, známá také pod zkratkou FFT [15].

Rychlá Fourierova transformace umožňuje výpočetně optimalizovaný výpočet DFT a IDFT. Proto má tento algoritmus mnohem nižší výpočetní náročnost, konkrétně $O(N \cdot \log_2 \cdot N)$. Pokud by tedy bylo $N = 1024$, pak náročnost DFT by byla $O(1048576)$ a náročnost FFT $O(10240)$.

Algoritmus pro výpočet rychlé Fourierovy transformace vymysleli J. W. Cooley a J. W. Tukey, proto se nazývá Cooley-Tukey algoritmus. Používá se pro signály, které jsou navzorkovány na $N = 2^m$ vzorků, kde m je celé kladné číslo. Pokud není počet vzorků sudý, doplní se nulou. Algoritmus vychází z DFT, proto je tedy základem výpočtu vztah 4.3. Při aplikování algoritmu FFT se posloupnost $f(n)$, která obsahuje N prvků, rozdělí na dvě posloupnosti, které budou mít $N/2$ prvků. Prvky se konkrétně rozdělí na sudé a liché. Proto nová posloupnost $g(i)$ obsahuje prvky $f(2i)$ a posloupnost $h(i)$ obsahuje prvky $f(2i+1)$, pro $i = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$. Dále se předpokládá, že nové posloupnosti $g(i)$ a $h(i)$ mají svoji DFT, které jsou definovány vztahy: [16]

$$G(l) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g(i) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N/2} \cdot i}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (4.7)$$

$$H(l) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h(i) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N/2} \cdot i}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1. \quad (4.8)$$

Pak původní hodnoty spektra lze vyjádřit pomocí dílčích výpočtů $G(l)$ a $H(l)$ následovně: [16]

$$F(l) = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g(i) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot i} + h(i) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot (2 \cdot i + 1)} \right), \quad (4.9)$$

$$\text{pro } l = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1,$$

kde $g(0) = f(0), g(1) = f(2), \dots, g(N/2-1) = f(N-1)$ a $h(0) = f(1), h(1) = f(3), \dots, h(N/2-1) = f(N-2)$. Tuto rovnici je možné upravit do tvaru: [16]

$$F(l) = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g(i) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot i} + h(i) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot i} e^{-j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N}} \right), \quad (4.10)$$

$$\text{pro } l = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1,$$

V tomto kroku ještě není docíleno výpočetní náročnosti $O(N \cdot \log_2 \cdot N)$. Pro tuto náročnost je nutné pokračovat dále v rozdělení posloupností $g(i)$ a $h(i)$ opět na sudé a liché prvky. Takto je nutné pokračovat až do doby, kdy posloupnost obsahuje pouze jeden sudý a jeden lichý prvek předchozí posloupnosti. Poté je docíleno požadované výpočetní náročnosti $O(N \cdot \log_2 \cdot N)$ [16].

Stejným způsobem se také postupuje při výpočtu inverzní rychlé Fourierovy transformace (IFFT). Vychází se z rovnice 4.4. Tvar IFFT je pak roven:

$$f(i) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{l=0}^{N/2-1} \left(G(l) \cdot e^{j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot i} + H(l) \cdot e^{j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot i} e^{j \cdot l \cdot \frac{2\pi}{N}} \right), \quad (4.11)$$

$$pro \ i = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

Pokud se pracuje ve dvourozměrném prostoru, je postup opět stejný jako pro FFT a IFFT v jednorozměrném prostoru. Vychází se s dvourozměrné DFT a IDFT, tzn. z rovnic 4.5 a 4.6.

4.3.1 Využití algoritmu FFT při výpočtu konvoluce

Diskrétní konvoluce vyžaduje opět velmi zdoluhavý výpočet při dlouhých posloupnostech. Pro urychlení výpočtu je možné použít algoritmus FFT. Platí vztah: [11]

$$x_1(n) * x_2(n) \cong X_1(k) \cdot X_2(k), \quad (4.12)$$

kde $x_1(n)$ je vstupní posloupnost a $x_2(n)$ je konvoluční jádro. Pak $X_1(k)$ a $X_2(k)$ jsou jejich Fourierovy obrazy. Symbol \cong zde vyjadřuje, že konvoluce mezi $x_1(n)$ a $x_2(n)$ odpovídá vynásobení Fourierových obrazů $X_1(k)$ a $X_2(k)$. To znamená, že $X_1(k)$ a $X_2(k)$ se vypočítají podle vztahu 4.9. Je nutné tedy posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ upravit postupně na sudé a liché prvky. Výsledná diskrétní konvoluce se pak spočítá podle vztahu: [11]

$$x(n) = IFFT(X_1(k) \cdot X_2(k)). \quad (4.13)$$

Jako první se tedy vypočítá FFT pro vstupní posloupnost $x_1(n)$ a konvoluční jádro $x_2(n)$. Po vynásobení těchto Fourierových obrazů se provede IFFT a tím se získá výsledek diskrétní konvoluce. Převod pomocí FFT a IFFT značně urychlí výpočet diskrétní konvoluce.

Stejným postupem se vypočítá také dvourozměrná diskrétní konvoluce. Konkrétní příklady a aplikace teorie je obsažena dále v textu, viz kap. 5 a 6 [11].

5 NÁVRH WEBOVÉ APLIKACE

Cílem práce je návrh a implementace webové aplikace, která bude sloužit pro doporučení optimálního mířícího bodu při střelbě na terč. Doporučení optimálního bodu bude možné automatickým nastavením parametrů pomocí vložení testovacích výsledků hodů daného uživatele. Pokud ale daný uživatel nemá žádná vlastní data, bude také možné určit pouze směrodatné odchytky dvourozměrného normálního rozdělení a optimální bod pak bude určen v rozsahu celého terče.

Tato kapitola se zabývá návrhem webové aplikace, který je zaměřen na rozdělení hlavních funkcí aplikace a jejich teoretického návrhu. V kapitole 5.1 je vysvětlen matematický model terče a jeho rozdělení na dílky. Každý dílek bude zastupovat danou bodovou hodnotu terče. Tyto hodnoty se poté uloží do matice. Další kapitola 5.2 se zabývá návrhem dvourozměrného normálního rozdělení. Jeho hodnoty budou tvořit další matici nutnou k výpočtu. Hodnoty dvourozměrného normálního rozdělení je možné také získat odhadem parametrů normálního rozdělení na základě vložených hodnot daného uživatele. Odhady parametrů normálního rozdělení jsou popsány v kapitole 5.3. Získají se tedy dvě matice pro výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce, který je uveden v kapitole 5.4. Výsledkem konvoluce bude nová matice, kde nejvyšší hodnota bude zastupovat optimální bod terče. Konkrétní implementace webové aplikace je uvedena v následující kapitole 6.

5.1 Rozdělení terče na dílky

Aby bylo možné určit optimální bod při hodu na terč, musí se provést rozdělení terče na dílky o určitém obsahu. Uživatel webové aplikace bude moci diskretizaci terče volit v rozpětí 1 až 4 mm. Dílek je tvaru čtverce, proto uživatel bude volit pouze délku hrany dílku. Volit se budou pouze celá čísla, tj. 1 mm, 2 mm, 3 mm a 4 mm. Pokud by se dílky mohly volit menší jak 1 mm, pak by byl výpočet optimálního bodu velice časově náročný. Naopak velikost hrany dílku 4 mm je pro časovou náročnost výpočtu dostačující, viz kapitola 7.3, která se zabývá výpočetní náročností optimálního bodu. Pro vysvětlení daného problému bude v následujícím textu obsah dílku zvolen na 1 mm^2 . Poté se určí souřadnice každého dílku v terči a tyto souřadnice poté budou sloužit jako indexy v matici, kde budou uloženy bodové hodnoty terče.

V první řadě je však nutné popsat vhodným způsobem každý segment terče. Jak již bylo zmíněno v teoretické části (viz kap. 1.2), terč se skládá z dvaceti stejných výsečí. Každá výseč je rozdělena na čtyři segmenty. Střed terče je dvojitý a skládá se z kruhu a mezikružích. Hrací pole terče tvoří 82 segmentů. Každý segment je součástí jednoho kruhu, a proto je každý segment popsán pomocí polárních souřadnic.

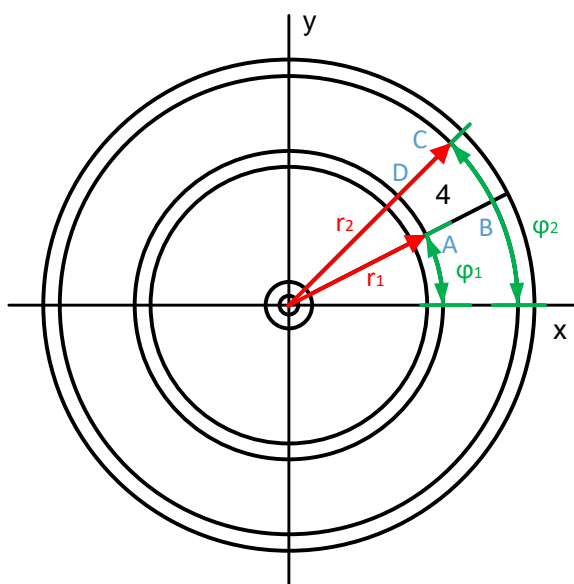
Polární souřadnice určují libovolný bod v rovině. Pokud je soustava souřadnic umístěna ve středu kruhu, pak se libovolný bod určí na základě vzdálenosti od středu soustavy souřadnic a jeho úhlu od vodorovné osy. Každý segment kromě segmentu SB a DB je ohraničen čtyřmi hranami o čtyřech vrcholech. To znamená, že pro určení polohy každého segmentu v kruhu postačí polární souřadnice vrcholů. Pro segment DB se aplikují polární souřadnice pro definici kruhu. Bude tedy stačit definovat vzdálenost od středu soustavy souřadnic. Úhel bude v celém rozsahu od 0° až po 360° . Podobný případ nastane také pro segment SB, kde je ale nutné definovat dvě vzdálenosti od středu soustavy souřadnic.

Na obr. 5.1, je ukázka aplikování polárních souřadnic. Vyznačený segment pro hodnotu čtyř bodů obsahuje čtyři vrcholy označené A, B, C a D. Například pro bod A platí následující polární souřadnice:

$$r_1 = 104,8 \text{ mm},$$

$$\varphi_1 = 27^\circ.$$

Podobným způsobem se určí také souřadnice pro ostatní vrcholy daného segmentu, viz tab. 5.1. Tyto souřadnice určují přesnou polohu segmentu v terči.



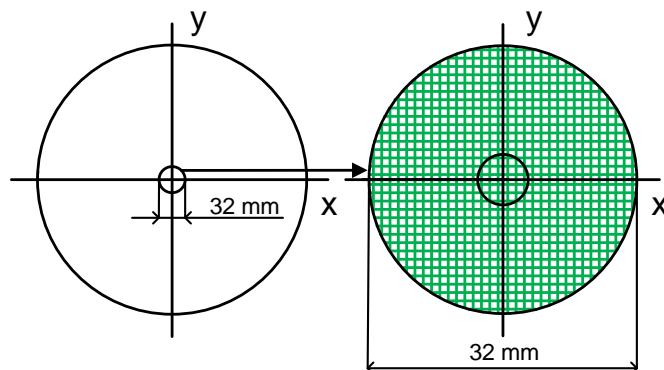
Obr. 5.1: Zobrazení polárních souřadnic pro segment o bodové hodnotě 4.

Stejně tak se definují souřadnice všech 80 segmentů terče kromě segmentu SB a DB. Souřadnice budou dále sloužit jako hranice pro určení bodové hodnoty každého dílku terče.

Tab. 5.1: Polární souřadnice pro segment o bodové hodnotě 4.

	r [mm]	φ [°]
A	r_1	φ_1
B	r_2	φ_1
C	r_2	φ_2
D	r_1	φ_2

Po definování souřadnic každého segmentu terče následuje rozdělení terče na jednotlivé dílky tvaru čtverce, které budou mít obsah 1 mm^2 . Rozdělení terče na dílky je zobrazeno na obr. 5.2, kde je zaměřen pouze segment SB a DB. Důvodem je velmi malý rozměr dílků. Pro rozdělení byla zvolena kartézská soustava souřadnic, kterou tvoří osa x a y . Střed soustavy je umístěn ve středu terče. Jednotlivým dílkům tedy budou přiřazeny souřadnice (x, y) . Protože má dílek obsah 1 mm^2 , není nutné pro jeho polohu definovat souřadnice vrcholů. Přesnou polohu dílku v terči budou určovat souřadnice jeho středu. Obdobná situace je definována také pro velikost hrany dílku 2 mm, 3 mm a 4 mm.

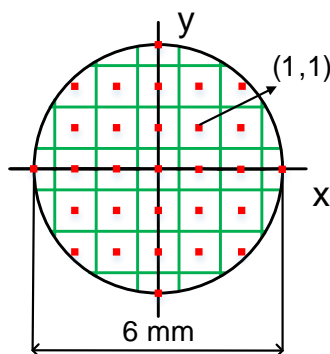


Obr. 5.2: Rozdělení segmentu SB a DB na dílky.

Terč má v průměru 340 mm. Jelikož se terč rozdělí na dílky tvaru čtverce o obsahu 1 mm^2 , je patrné, že strana dílku bude mít délku 1 mm. Na obr. 5.3 je uveden segment DB a jeho rozdělení na dílky, kde je uveden střed každého dílku. Pro názornost ukázky rozdělení dílků byl segment DB zmenšen na polovinu své velikosti. Jeho průměr je ve skutečnosti 12 mm. Ve středu soustavy souřadnic je umístěn vždy dílek o souřadnicích $(0, 0)$. V kladném i v záporném směru osy x bude 170 dílků.

Souřadnice y pro tyto dílky bude rovna 0, to znamená, že dílky svým středem leží přesně na ose x . Dohromady na této ose bude 341 dílku. Tento počet dílků bude platit také pro osu y . Při důkladné úvaze si nelze nevšimnout, že dílek se souřadnicemi $(170, 0)$ přesahuje částí mimo terč. Avšak pro výpočet budou použity souřadnice středů jednotlivých dílků, které leží přímo na hranici terče, protože poloměr terče je stejný jako souřadnice osy x , tj. 170 mm. Dílky, které budou také svým středem ležet přesně na poloměru terče, mají souřadnice $(-170, 0)$, $(0, 170)$ a $(0, -170)$. Tyto dílky tedy budou obsahovat bodovou hodnotu terče, která pro tyto souřadnice přísluší.

Pokud dílek bude ležet svým středem na rozhraní dvou bodových segmentů, bude patřit segmentu, který v polárních souřadnicích má menší vzdálenost od středu soustavy souřadnic a jeho úhel od vodorovné osy x je menší. Například při určení polohy dílku o souřadnicích $(3, 0)$, který leží na hranici segmentu DB a SB, viz obr. 5.3. Dílek bude patřit segmentu DB, protože tento segment má hranici vzdálenou blíže ke středu než segment SB. Stejný způsob určení bude aplikován také při poloze dílku, který má úhel roven například 45° . V tomto případě bude dílek náležet segmentu, který má menší úhel pro vrchol A podle obr. 5.1.



Obr. 5.3: Rozdělení segmentu DB na dílky.

Předtím než bude vysvětleno, jakým způsobem se daným souřadnicím přiřazuje příslušná bodová hodnota, je vhodné ukázat, jak přesně budou bodové hodnoty s danými souřadnicemi uloženy v matici. Matice bude v rámci implementace zastoupena dvourozměrným polem, ale pro další výklad se kvůli názornosti bude uvažovat matice. Datová struktura typu pole, je nejvhodnější datovou strukturou pro tento případ. Souřadnice budou sloužit jako indexy matice. Osa x bude označovat sloupce matice a osa y pak její řádky. Jako hodnoty matice budou uloženy jednotlivé bodové hodnoty terče. Ukázka matice je zobrazena na obr. 5.4. Bodové hodnoty terče budou

uloženy do matice na pozice 0, 1, 2, ..., 340. To znamená, že bodová hodnota na souřadnicích (0,0) bude v matici uložena na pozici (170,170). Indexy a souřadnice se tedy musejí přepočítávat. Tento způsob je optimální pro výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce, viz kap. 5.4.

Na ose x a y bude maximálně 341 dílků. Matice bude tedy obsahovat 341 řádků a sloupců. Terč má tvar kruhu, ale matice bude obsahovat 341×341 hodnot. Tvar matice tedy bude čtvercový. Proto do matice na místo souřadnic dílku, který neleží v terči, bude uložena bodová hodnota rovna 0. Ostatní hodnoty matice budou obsahovat bodové hodnoty terče v závislosti na poloze daného dílku v terči. Při pohledu na matici budou tedy její hodnoty znázorňovat tvar terče.

y/x	0	1	. . .	16	. . .	170	. . .	186	. . .	339	340
0	0	0	. . .	0	. . .	40	. . .	0	. . .	0	0
1	0	0	. . .	0	. . .	40	. . .	0	. . .	0	0
.
.
.
16	0	22	. . .	12	. . .	25	. . .	4	. . .	12	0
.
.
.
170	22	22	. . .	25	. . .	50	. . .	25	. . .	12	12
.
.
.
186	0	22	. . .	7	. . .	25	. . .	15	. . .	12	0
.
.
.
339	0	0	. . .	0	. . .	6	. . .	0	. . .	0	0
340	0	0	. . .	0	. . .	6	. . .	0	. . .	0	0

Obr. 5.4: Rozložení matice obsahující bodové hodnoty terče.

Při určení bodové hodnoty terče pro dané souřadnice dílku je nutné vyřešit dvě základní podmínky. Za prvé se musí určit, zdali souřadnice, které označují polohu daného dílku, neleží mimo terč. Ošetření této podmínky je jednoduché. Jelikož má terč tvar kruhu, stačí kontrolovat vzdálenost daného dílku od středu soustavy souřadnic. Tuto vzdálenost ve skutečnosti značí polární souřadnice r , kterou lze jednoduše získat pomocí Pythagorovy věty: [17]

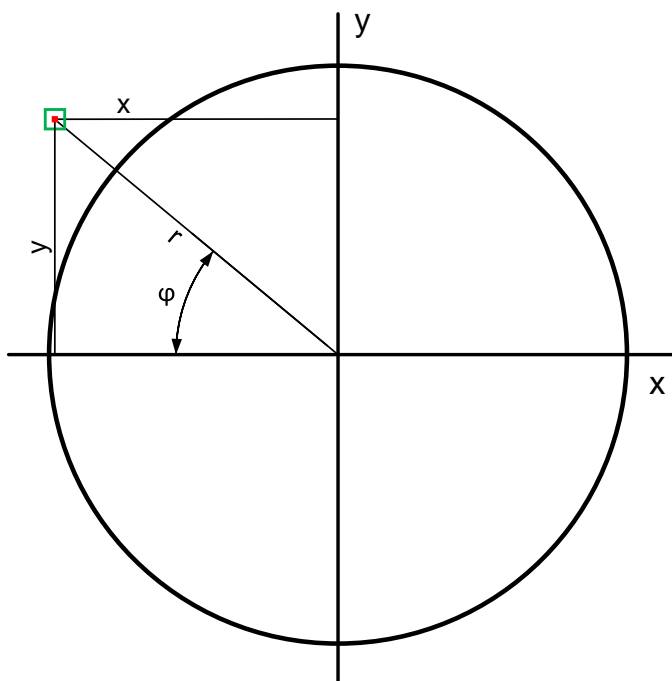
$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (5.1)$$

Tímto vztahem se získá vzdálenost dílku od středu soustavy souřadnic, která nesmí být větší jak 170 mm, protože jak bylo uvedeno v kapitole 1.2, terč má poloměr 170 mm. Například dílek, který má souřadnice $(-168, 155)$, bude mít vzdálenost od středu soustavy souřadnic:

$$r^2 = (-168)^2 + 155^2,$$

$$r = \sqrt{(-168)^2 + 155^2} = 228,58 \text{ mm}.$$

Dílek má vzdálenost tedy větší jak 170 mm, a proto bude do matice uložena bodová hodnota 0 pro tyto souřadnice. Tento příklad je znázorněn na obr. 5.5. Dílek je pro ukázkou zvětšen.



Obr. 5.5: Určení souřadnic dílku pro hranici terče.

Druhou podmínkou je určení, kterou bodovou hodnotu dané souřadnice označují. Pro tuto podmínku je nutné přepočítat kartézské souřadnice dílku na polární. Při výpočtu polárních souřadnic pro kartézské souřadnice $(77, 112)$ se vzdálenost od středu soustavy souřadnic získá pomocí Pythagorovy věty, viz vztah 5.1. Je potřeba znát také úhel φ od vodorovné osy, který se vypočítá pomocí vztahu: [18]

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (5.2)$$

Tento úhel neznačí přesný úhel dílku v terči. Záleží na tom v jakém kvadrantu soustavy souřadnic se nachází dílek. Pokud dílek bude ležet na souřadnicích

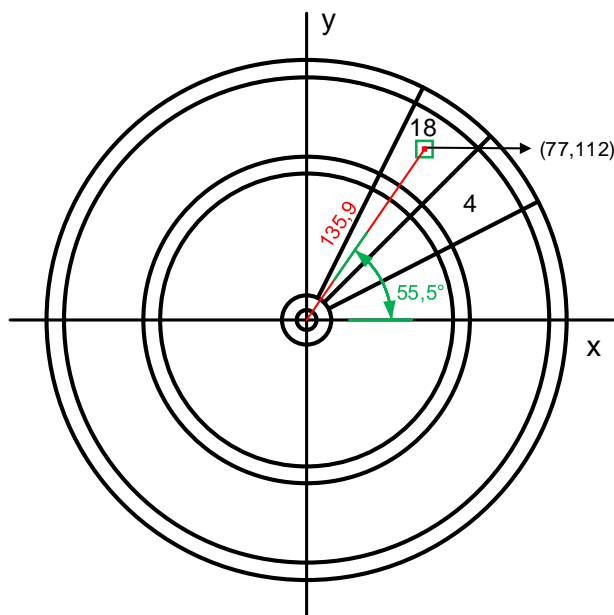
$(-77, 112)$, bude se nacházet ve druhém kvadrantu. Úhel pak po aplikování vztahu 5.2 bude roven $-55,5^\circ$. Jedná se sice o úhel od vodorovné osy, ale ve druhém kvadrantu. Stejný příklad platí také pro úhel na obr. 5.5. Přesný úhel v terči pro dílek o souřadnicích $(-77, 112)$ je roven $124,5^\circ$. Je tedy nutné určit, v jakém kvadrantu soustavy souřadnic se dílek nachází. Pro druhý a třetí kvadrant se přesný úhel dílu v terči určí podle vztahu:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180. \quad (5.3)$$

Pro čtvrtý kvadrant platí následující vztah:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 360. \quad (5.4)$$

Zpět k dílku o souřadnicích $(77, 112)$. Po přepočítání kartézských souřadnic dílku na polární se získají souřadnice $r = 135,9$ mm a $\varphi = 55,5^\circ$. Poloha dílku v terči je uvedena na obr. 5.6. Dílek je pro ukázkou zvětšen.



Obr. 5.6: Určení bodové hodnoty dílku v závilsloti na souřadnicích.

Podle obr. 5.6 leží dílek o polárních souřadnicích $r = 135,9$ mm a $\varphi = 55,5^\circ$ v segmentu o bodové hodnotě 18. Určení bodové hodnoty pro dané souřadnice se provede porovnáním polárních souřadnic všech segmentů terče a polárních souřadnic dílku. Polární souřadnice segmentu o bodové hodnotě 18 jsou uvedeny v tab. 5.2, ze kterých lze definovat intervaly pro vzdálenost od středu soustavy souřadnic $\langle 107, 160 \rangle$ a pro úhel $\langle 45, 63 \rangle$. Polární souřadnice daného dílku patří do daných intervalů. Konkrétní implementace rozdělení terče na dílky je uvedena v kapitole 6.1.

Tab. 5.2: Polární souřadnice pro segment o bodové hodnotě 18.

	r [mm]	φ [°]
A	107	45
B	160	45
C	160	63
D	107	63

5.2 Definice dvourozměrného normálního rozdělení

Dvourozměrné normální rozdělení bude ve výpočtu sloužit jako matice konvoluční masky. V rámci webové aplikace mohou nastat dvě definice matice dvourozměrného normálního rozdělení. První případ nastane, pokud uživatel nemá žádná vlastní data. Uživatel pouze zadá velikosti směrodatných odchylek σ_x a σ_y , a tím definuje velikost normálního rozdělení. Tento případ je popsán v této podkapitole. V druhém případě, kdy uživatel má vlastní data, se parametry normálního rozdělení odhadnou. Tímto případem se zabývá následující kapitola 5.3.

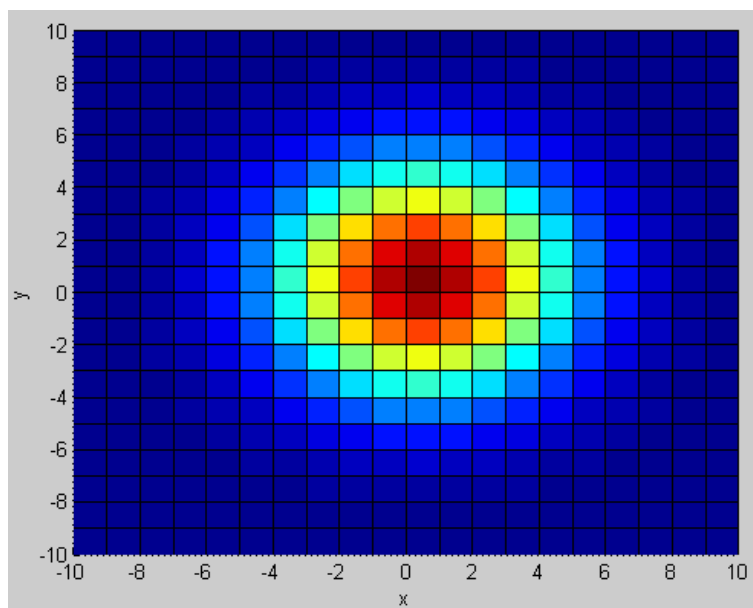
Zadány budou parametry pro dvě spojité náhodné veličiny X a Y . Výpočet bude prováděn pomocí výpočetní techniky. Je tedy nutné spojité veličiny diskretizovat na jednotlivé hodnoty, které budou korespondovat se souřadnicemi terče (x, y) . Hodnoty spojité veličiny X budou korespondovat se souřadnicemi x a hodnoty spojité veličiny Y budou korespondovat se souřadnicemi y .

Uživatel bude definovat pouze směrodatné odchylky σ_x a σ_y . Jelikož je terč rozdělen na dílky, které mají hranu o velikosti 1 mm, budou také směrodatné odchylky zadány v milimetrech. Směrodatné odchylky tedy definují velikost dvourozměrného normálního rozdělení. Pokud se směrodatné odchylky umocní, získají se rozptyly, tj. σ_x^2 a σ_y^2 . Střední hodnoty μ_x a μ_y nebudou zadány uživatelem. Tyto hodnoty budou nulové. Na nulovou hodnotu bude nastavena také korelace ρ . Výpočtem dvourozměrné diskrétní konvoluce, viz kap. 5.4, se střední hodnoty normálního rozdělení hledají. Po provedení výpočtu konvoluce se získá nová matice, kde nejvyšší hodnota ukazuje na optimální bod terče. Indexy matice této hodnoty poté odpovídají hledaným středním hodnotám.

Výše uvedené parametry budou sloužit jako vstupní hodnoty pro vztah 2.12. Výstupem této rovnice je hustota dvourozměrného normálního rozdělení (viz obr. 2.4 a obr. 2.5), která je spojitá, ale při výpočtu pomocí výpočetní techniky dojde k její diskretizaci. Výpočet bude proveden pro obě veličiny X a Y až po hodnoty těchto veličin, které jsou rovny $\mu + 3\sigma$. Hodnoty dvourozměrného normálního rozdělení budou

rozděleny po 1 mm, aby souhlasily se souřadnicemi dílků terče. To znamená, že hustota dvourozměrného normálního rozdělení bude počítána pro následující hodnoty $\mu - 3\sigma, \dots, -1, 0, 1, \dots, \mu + 3\sigma$ veličin X a Y .

Například uživatel definuje směrodatné odchylky $\sigma_x = \sigma_y = 3$ mm. Zmíněné střední hodnoty μ_x a μ_y a korelace ρ budou nulové. Výsledné dvourozměrné normální rozdělení pro dané hodnoty je zobrazeno na obr. 5.7.



Obr. 5.7: Normální rozdělení pro $\sigma_x = \sigma_y = 3$ mm a $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$.

V rámci implementace dvourozměrného normálního rozdělení (viz kap. 6.4) bude vytvořena matice, do které se vloží hodnoty hustoty dvourozměrného normálního rozdělení. Matice bude stejně jako v případě uložení bodových hodnot terče zastoupena dvourozměrným polem, ale pro další výklad se kvůli názornosti bude uvažovat matice. Pro výše uvedený příklad je matice znázorněna na obr. 5.8. Hodnoty do matice tedy budou zapsány až po hodnoty veličin X a Y , které se rovnají $\mu + 3\sigma$. Jak bylo uvedeno v kap. 2.4.1, tyto hodnoty tvoří 99,7 % všech hodnot hustoty normálního rozdělení. To také platí pro dvourozměrné normální rozdělení. Následně se do matice uloží všechny hodnoty hustoty dvourozměrného normálního rozdělení pro veličiny X a Y , které jsou rovny $-9, -8, \dots, 0, \dots, 8, 9$.

V kódu podobně jako u indexování matice bodových hodnot terče (viz kap. 5.1) bude matice indexována od 0-tého indexu. Důvodem je lepší práce s maticemi v rámci kódu a rychlejší vyhledávání v datové struktuře typu pole. Ve skutečnosti budou tedy indexy posunuty o $3\sigma_x$ pro náhodnou veličinu X a o $3\sigma_y$ pro náhodnou veličinu Y . Takže pro výše uvedený příklad budou indexy pro veličiny X a Y v rámci

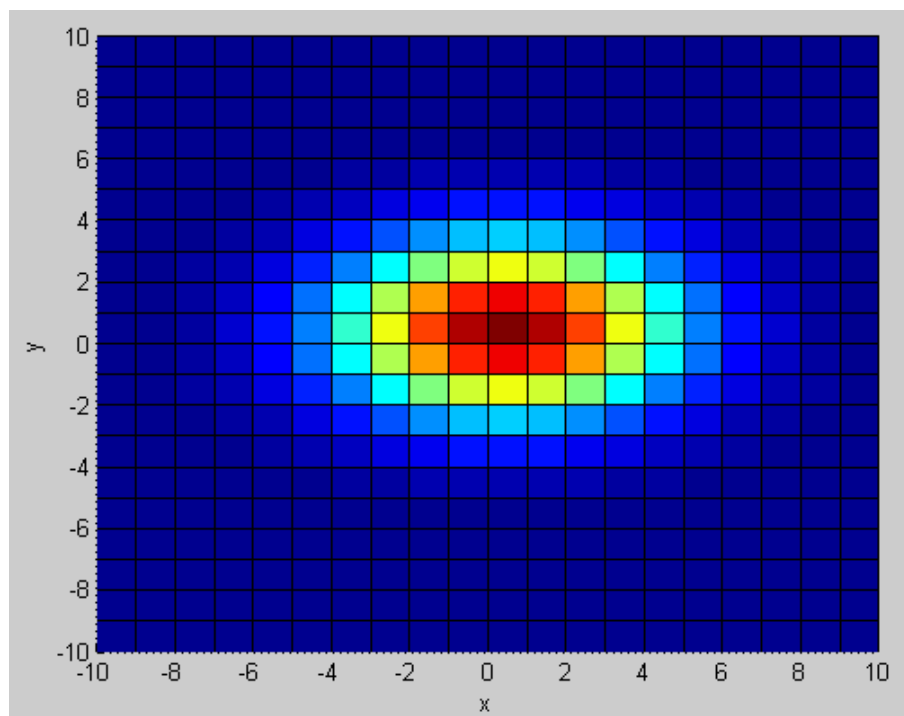
y/x	-9	-8	...	0	...	8	9
-9	2,18E-06	5,61E-06	...	0,0002	...	5,61E-06	2,18E-06
-8	5,61E-06	1,44E-06	...	0,0005	...	1,44E-06	5,61E-06
.
.
.
0	0,0002	0,0005	...	0,0177	...	0,0005	0,0002
.
.
.
8	5,61E-06	1,44E-06	...	0,0005	...	1,44E-06	5,61E-06
9	2,18E-06	5,61E-06	...	0,0002	...	5,61E-06	2,18E-06

Obr. 5.8: Rozložení matice obsahující hodnoty dvourozměrného normálního rozdělení pro $\sigma_x = \sigma_y = 3$ mm a $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$.

kódu rovny 0, 1, ..., 9 ..., 17, 18, kde index 9 zastupuje nulovou střední hodnotu. Samozřejmě hodnoty pro vztah 2.12 zůstanou zachovány, tj. -9, -8, ..., 0 ..., 8, 9.

Uživatel bude moci volit různé velikosti směrodatných odchylek náhodných veličin X a Y . Nemusí vždy volit pro obě náhodné veličiny stejné směrodatné odchylky. Na obr. 5.9 je zobrazeno dvourozměrné rozdělení pro směrodatné odchylky $\sigma_x = 3$ mm a $\sigma_y = 2$ mm. Uživatel tak může definovat přesný tvar dvourozměrného normálního rozdělení.

Dvourozměrné normální rozdělení dvou náhodných spojitých veličin X a Y je spojitě pravděpodobnostní rozdělení. To znamená, že integrál hustoty dvourozměrného normálního rozdělení musí být roven 1. V případě jednorozměrného normálního rozdělení musí být plocha pod křivkou (viz obr. 2.1) rovna 1. Pro dvourozměrné normální rozdělení pak musí být objem pod křivkou roven 1. Pro výpočet konvoluce je nutné dané rozdělení diskretizovat, a to v závislosti na velikosti dílku. Pokud tedy bude mít dílek délku hrany 4 mm, pak terč musí být rozdělen na dílky této velikosti, ale také normální rozdělení musí být rozděleno na dílky této velikosti. To znamená, že pokud by se rozdělení nadiskretizovalo na dílky velikosti 4 mm, součet hodnot matice by nebyl roven 1. Z tohoto důvodu se dvourozměrné normální rozdělení v rámci implementace nadiskretizuje na dílky s délkou hrany 0,1 mm, aby výsledná suma byla rovna přibližně 1.

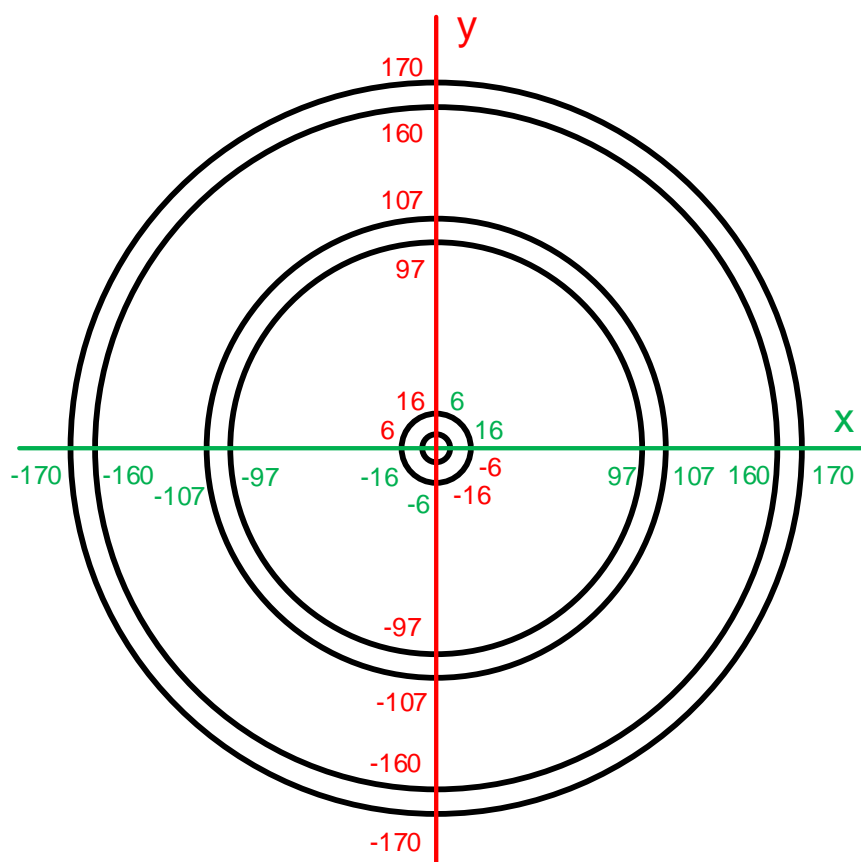


Obr. 5.9: Normální rozdělení pro $\sigma_x = 3 \text{ mm}$, $\sigma_y = 2 \text{ mm}$ a $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$.

Matice dvourozměrného normálního rozdělení, kdy uživatel definoval směrodatné odchylky $\sigma_x = 3 \text{ mm}$ a $\sigma_y = 3 \text{ mm}$, je uvedena na obr. 5.7. Jak bylo uvedeno výše v textu, indexy v rámci kódu budou upraveny na hodnoty 0, 1, ..., 9 ..., 17, 18. Matice tedy bude mít stejné hodnoty, ale jiné indexy. V tomto případě ale součet všech hodnot matice není roven 1, i když se použila diskretizace s velikostí hrany dílku 1 mm. Mnohem přesnější výsledek lze získat rozdělením normálního rozdělení na dílky o velikosti hrany 0,1 mm. Střední hodnoty náhodných veličin X a Y jsou rovny 0 a budou do matice uloženy na indexy (9,9). Poté hodnota dvourozměrného normálního rozdělení pro střední hodnotu bude počítána jako suma všech hodnot z intervalu $\langle -0,5, 0,4 \rangle$, tj. suma hodnot -0,5, -0,4, ..., 0, ..., 0,3, 0,4. Dále například do pole na indexy (10,10) bude uložena hodnota sumy hodnot z intervalu $\langle 1,5, 2,4 \rangle$. Konkrétní implementace definice parametrů dvourozměrného normálního rozdělení je uvedeno v kapitole 6.2. Uložení hodnot do pole je pak vysvětleno v kapitole 6.4.

5.3 Odhad parametrů a definice dvourozměrného normálního rozdělení

V aplikaci bude také možnost zadat vlastní nastřílené hodnoty. Protože je terč na-diskretizovaný na velmi malé dílky v porovnání s velikostí jednotlivých segmentů, je možné určit přesnou polohu šípky v terči. Jak bylo uvedeno, střed kartézské soustavy souřadnic s osami x a y leží přímo ve středu terče. Terč spolu s kartézskou soustavou je znázorněn na obr. 5.10, kde jsou uvedeny vzdálenosti jednotlivých hranic segmentů terče od středu kartézské soustavy souřadnic v milimetrech.



Obr. 5.10: Znázornění terče a kartézské soustavy souřadnic.

Uživatel bude zadávat souřadnice svých hodů v milimetrech. Například může zadat hodnoty, které jsou uvedeny v tab. 5.3. Počítá se s rozdělením terče na dílky o velikosti 1 mm. Tyto hodnoty budou použity pro odhad středních hodnot a odhad rozptylů. Odhady budou provedeny pomocí vztahů 2.19 a 2.20.

Tab. 5.3: Příkald souřadnic nastřílených hodnot.

číslo hodu	x [mm]	y [mm]	bodová hodnota
1.	-25	10	14
2.	25	-5	10
3.	14	18	18
4.	-20	-14	16

Jako první se vypočítají střední hodnoty μ_x a μ_y :

$$\mu_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{-25 + 25 + 14 - 20}{4} = -1,5 \doteq -2 \text{ mm},$$

$$\mu_y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{10 - 5 + 18 - 14}{4} = 2,25 \doteq 2 \text{ mm}.$$

Pro střední hodnoty vychází racionální číslo, ale diskretizace terče je na dílky o velikosti 1 mm. Proto se odhady středních hodnot musejí zaokrouhlit na celé číslo. Důvodem je, aby střední hodnoty normálního rozdělení tvořily hodnoty, které se rovnají souřadnicím jednoho z dílků terče. Pro odhad směrodatných odchylek σ_x^2 a σ_y^2 jsou použity nezaokrouhlené hodnoty středních hodnot.

Jiný případ nastává při velikosti hrany dílku větší jak 1 mm. Například pro velikost hrany dílku 3 mm. Při zadávání souřadnice x se každá zadaná hodnota porovnává se všemi souřadnicemi jednotlivých dílků terče pro osu x . Pokud neexistuje dílek s touto souřadnicí, pak se při porovnání vypočítá absolutní hodnota rozdílu zadané hodnoty a dané souřadnice osy x . Pro nejmenší hodnotu rozdílu se určí daná souřadnice jako výsledná hodnota zadané souřadnice. Pokud nastane stejná absolutní hodnota rozdílu pro více jak jednu souřadnici, pak je výsledná zadaná souřadnice nastavena na menší hodnotu souřadnice, která je blíže ke středu terče. Takže zadané hodnoty z tab. 5.3 se přepočítají na nejbližší možné souřadnice dílků terče, který je rozdělen na dílky o velikosti hrany 3 mm.

Nicméně dále je uveden příklad, kdy výsledná střední hodnota μ_x je rovna souřadnici -2 při rozdělení terče na dílky o velikosti hrany 3 mm. Tato souřadnice je v programu zastoupena indexem pole 168. Souřadnice dílků pro osu x pro jakoukoliv hodnotu souřadnice osy y budou -168, ..., -3, 0, 3, ..., 168. Žádný z dílků nebude mít souřadnici osy x rovno -2. Aby se výsledná odhadnutá střední hodnota nastavila na nejbližší možnou souřadnici, byl použit stejný algoritmus jako v případě zadávání souřadnic. Tento algoritmus tedy porovná danou střední hodnotu μ_x s každou souřadnicí osy x . Při porovnání se vypočítá absolutní hodnota rozdílu střední hodnoty a dané souřadnice. Pro nejmenší hodnotu rozdílu se určí daná souřadnice jako

výsledná střední hodnota μ_x . Pokud nastane stejná absolutní hodnota rozdílu pro více jak jednu souřadnici, pak je střední hodnota nastavena na menší hodnotu souřadnice, která je blíže ke středu terče. V tomto konkrétním případě by tedy střední hodnota $\mu_x = -1,5$ mm, za podmínky velikosti hrany dílku 3 mm, byla nastavena na hodnotu 0. V kódu tato souřadnice odpovídá indexu pole 170.

Zpět k původnímu příkladu pro hodnoty z tab. 5.3 a rozdělení terče na dílky o velikosti hrany 1 mm. Dále se odhadnou rozptyly σ_x^2 a σ_y^2 :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 = \frac{552,25 + 702,25 + 240,25 + 342,24}{4} = 459,25 \text{ mm}^2,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 = \frac{60,06 + 52,56 + 248,06 + 264,06}{4} = 156,185 \text{ mm}^2.$$

Rozptyly lze přepočítat na směrodatné odchyly σ_x a σ_y odmocněním daných rozptylů σ_x^2 a σ_y^2 . Získají se tak směrodatné odchyly $\sigma_x = 21,430$ mm a $\sigma_y = 12,497$ mm. Dané odhadnuté střední hodnoty a vypočítané směrodatné odchyly z rozptylů se použijí pro výpočet dvourozměrného normálního rozdělení.

Optimální bod se bude počítat jen na určité části terče v závislosti na odhadnutých středních hodnotách a směrodatných odchylkách. Definuje se dvourozměrné normální rozdělení, které bude mít střední hodnoty $\mu_x = -2$ mm a $\mu_y = 2$ mm. Jeho velikost se určí pomocí směrodatných odchylek, které jsou rovny $\sigma_x = 21,430$ mm a $\sigma_y = 12,497$ mm. Pro výpočet bude použitý interval hodnot normálního rozdělení v rozsahu $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$. Hodnota 3σ je v rámci daného příkladu rovna $3\sigma_x = 64,290$ mm pro náhodnou veličinu X a $3\sigma_y = 37,491$ mm pro náhodnou veličinu Y . To znamená, že dvourozměrné normální rozdělení bude definováno pro osu x v intervalu $\langle -66,290, 62,290 \rangle$ a pro osu y v intervalu $\langle -35,491, 39,491 \rangle$. V předchozí kapitole (viz kap. 5.2) bylo uvedeno, že normální rozdělení bude diskretizováno s krokem 0,1 mm. Poté se diskretizuje znovu s krokem, který je roven definované velikosti hrany dílku. Výsledná matice hodnot normálního rozdělení bude tedy v tomto příkladě obsahovat hodnoty pro osu x v intervalu $\langle -66, 62 \rangle$ a pro osu y v intervalu $\langle -35, 39 \rangle$.

Z důvodu lepší práce s maticemi v rámci implementace budou výše uvedené hodnoty normálního rozdělení uloženy pod indexy, které korespondují se souřadnicemi terče. Střední hodnoty $\mu_x = -2$ mm a $\mu_y = 2$ mm korespondují se souřadnicemi (168, 168). To znamená, že v kódu se pak hodnoty normálního rozdělení uloží pod indexy ve směru osy x $\langle 104, 232 \rangle$ a ve směru osy y $\langle 131, 205 \rangle$. Výpočet dvourozměrné konvoluce a určení optimálního bodu se pak bude počítat jen pro souřadnice dílků, které odpovídají jednotlivým indexům pole dvourozměrného normálního rozdělení. I zde ale platí, že by neměly nastat záporné indexy kvůli rychlosti výpočtu.

Proto se opět indexy pole hodnot normálního rozdělení zvětší o hodnotu 3σ . Takže reálné indexy pole hodnot normálního rozdělení pro daný příklad budou ve směru osy x $\langle 168, 296 \rangle$ a ve směru osy y $\langle 168, 242 \rangle$. Výpočet konvoluce se provede pro indexy pole bodových hodnot terče ve směru osy x $\langle 104, 232 \rangle$ a ve směru osy y $\langle 131, 205 \rangle$. Konkrétní implementace odhadů parametrů je uvedena v kapitole 6.3. Uložení hodnot dvourozměrného normálního rozdělení do pole je pak vysvětleno v kapitole 6.4.

5.4 Výpočet dvourozměrné diskretní konvoluce

V této kapitole bude vysvětlen postup výpočtu dvourozměrné diskretní konvoluce. Nyní ještě trocha teorie. V kapitole 3.2 bylo uvedeno, že dvourozměrná diskretní konvoluce se používá při zpracování obrazu, kde se počítá konvoluce mezi maticí, která obsahuje jasové hodnoty pixelů a maticí, která je tvořena hodnotami konvoluční masky. Hodnoty se mezi sebou vynásobí a tím se získá vážený průměr z okolních pixelů.

Dvourozměrná diskretní konvoluce se počítá pomocí vztahu 3.11. Pro názornost je zde vztah opět uveden. Protože se do matice bodových hodnot terče ukládají hodnoty podle souřadnic (x, y) , bude vztah pro tento konkrétní příklad upraven:

$$v(x, y) = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k a(x-i, y-j) \cdot z(i, j). \quad (5.5)$$

V této práci bude konvoluční masku tvořit dvourozměrné normální rozdělení. Podle vztahu 5.5 bude tato matice označena jako **Z**. Přesnou hodnotu v matici určuje $z(i, j)$, kde i značí sloupec matice a j řádek matice. Druhou maticí, která při zpracování obrazu odpovídá matici jasových hodnot pixelů, bude tvořit matice **A**, která obsahuje bodové hodnoty terče. Matice **A** odpovídá matici na obr. 5.4. Hodnotu v matici bude určovat $a(x, y)$, kde y značí řádek matice a x sloupec matice.

Podle vztahu 5.5 pro výpočet optimálního bodu značí $v(x, y)$ výsledek konvoluce, $a(x, y)$ bodovou hodnotu terče na pozici (x, y) a $z(i, j)$ hodnotu konvoluční masky na pozici (i, j) . Pro ukázkou bude zvolena jako konvoluční maska matice z obr. 5.8. Velikost masky je tedy 19×19 a $k = 9$. Ve vztahu 5.5 jsou dvě sumy, takže se bude sčítat dohromady 81 čísel, proto výpočet bude pouze naznačen. V prvním kroku bude konvoluční maska vložena na souřadnice terče $(0, 0)$. To znamená, že hodnoty na souřadnicích $(0, 0)$ a na pozici $(0, 0)$ v matici **Z** se budou překrývat. V rámci aplikace to budou hodnoty na pozici $(170, 170)$ matice **A** a hodnoty na pozici $(9, 9)$ matice **Z**. Pozice matice **Z** se budou přepočítávat, aby korespondovaly s indexy matice na obr. 5.8. Výsledek konvoluce bude uložen do nové matice **V** na pozici

(170, 170). Indexy i a j se budou rovnat:

$$\begin{aligned}i &= -k = -9, \\j &= -k = -9,\end{aligned}$$

Nyní se určí výpočet bodové hodnoty terče na pozici (179, 179) v matici \mathbf{A} při výpočtu konvoluce pro bodovou hodnotu na pozici (170, 170). Po dosazení do vztahu 5.5 bude výpočet konvoluce:

$$\begin{aligned}v(170, 170) &= x(170 - (-9), 170 - (-9)) \cdot z(-9, -9), \\v(170, 170) &= x(179, 179) \cdot z(-9, -9).\end{aligned}$$

Pomocí daného výpočtu se získala nová hodnota na pozici (170, 170) matice \mathbf{A} . Daný výsledek se uloží do nové proměnné tak, aby nedošlo k přepsání daných matic. Jedná se pouze o jeden z 81 výpočtů. Pokud se provedou všechny výpočty a sečtou se, získá se vážený průměr ze všech okolních hodnot a tento výsledek se uloží do nové matice \mathbf{V} na pozici (170, 170). Konkrétně se získala zprůměrovaná bodová hodnota z okolních bodových hodnot na souřadnicích terče (0, 0).

Tento proces se provede pro všechny hodnoty matice \mathbf{A} . Konvoluční maska se aplikuje tedy na všechny bodové hodnoty. Po aplikování se získá nová matice \mathbf{V} . Nejvyšší hodnota matice \mathbf{V} ukazuje na optimální bod terče. Musí se tedy přepočítat pozice z matice \mathbf{V} na konkrétní souřadnice. Pokud je výsledek na pozici (170, 170), je optimálním bodem terče bodová hodnota na souřadnicích (0, 0).

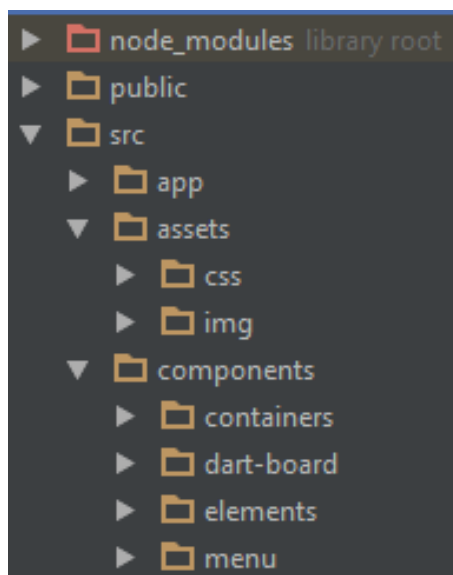
Je nutné zdůraznit, že při výpočtu konvoluce dojde k transpozici konvoluční masky, tj. dojde k záměně řádků a sloupců matice. Hodnoty náhodných veličin X a Y dvourozměrného normálního rozdělení jsou symetrické kolem středních hodnot μ_x a μ_y , tzn. že například hodnoty $\mu_x - 2\sigma = \mu_x + 2\sigma$. Proto se při výpočtu matice konvoluční masky nebude transponovat, aby se ušetřila už tak vysoká výpočetní náročnost.

6 IMPLEMENTACE WEBOVÉ APLIKACE

Pro aplikaci byl zvolen programovací jazyk JavaScript. Tento jazyk za posledních pět let prošel obrovským vývojem a v dnešní době je tak hlavní součástí při tvorbě nové webové aplikace. Konkrétně je v této práci použita nejnovější syntaxe ES 2015 (ES - ECMAScript). V dnešní době je již vyvíjena i syntaxe ES 2017. Aplikace je implementována pomocí knihovny React.js. Jedná se o JavaScriptovou knihovnu vyvíjenou společností Facebook. Aplikováním této knihovny dochází k velkému zrychlení webových stránek. Proto se také tato knihovna stala nejpoužívanější knihovnou pro vývoj webových aplikací za poslední čtyři roky. Aplikace je dostupná na adrese www.dartpoint.8u.cz.

V terminologii knihovny React.js tvoří aplikaci pět komponent. První se zabývá definováním velikosti dílku terče a rozdělením terče na dílky, viz kap. 6.1. Další komponenta řeší definici parametrů dvourozměrného normálního rozdělení, viz. kap. 6.2. V kapitole 6.3 je pak uvedena komponenta pro vložení vlastních nastřílených hodnot. Z těchto hodnot se pak odhadnou parametry normálního rozdělení. Konkrétní implementací naplnění pole hodnotami dvourozměrného normálního rozdělení se zabývá další komponenta, viz kap. 6.4. V této komponentě je také implementován výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce, který je popsán v kapitole 6.5. Poslední komponenta, která je popsána v kap. 6.6, řeší vykreslení terče a optimálního bodu. Uživatelské rozhraní aplikace, tzv. UI - User Interface, je uvedeno v příloze A. Kvůli velikosti byl obrázek rozdělen na dvě části.

Kód aplikace je uložen na přiloženém CD ve složce *web_app*, viz příloha B. Adresářová struktura je zobrazena na obr. 6.1. Ve složce *node_modules* jsou obsaženy veškeré balíčky pro podporu samotné React.js knihovny a dalších využitých knihoven. Hlavní kód aplikace je obsažen ve složce *src*. Podsložka *assets* obsahuje soubory pro CSS sytyly, které definují vzhled aplikace a její rozložení. V podsložce *assets* jsou také uloženy obrázky, které jsou v rámci aplikace použity. Nejdůležitější podsložkou je *components*, která obsahuje všechny komponenty aplikace. Podsložka *containers* obsahuje komponentu, ve které jsou ostatní komponenty propojeny. Komponenty pro rozdělení terče na dílky, definování parametrů dvourozměrného normálního rozdělení a vložení vlastních dat a odhad parametrů dvourozměrného normálního rozdělení jsou v podsložce *menu*. Komponenty pro výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce a pro vykreslení výsledku výpočtu jsou uvedeny v *dart-board*. V podsložce *elements* je uvedena komponenta *Loader*.



Obr. 6.1: Adresářová struktura aplikace.

6.1 Rozdělení terče na dílky

Každá komponenta je tvořena formulářem pro zadání určitého parametru. Komponenta pro výběr velikosti dílku je zobrazena na obr. 6.2. Obsahuje jediné vstupní pole formuláře pro definování velikosti dílku. Jak bylo uvedeno v kapitole 5.1, volbou velikosti dílku se rozdělí terč na dílky definované velikosti. Je možné zvolit čtyři velikosti dílku, a to konkrétně velikost 1 mm, 2 mm, 3 mm a 4 mm. Kód komponenty pro definování velikosti dílku je uveden v souboru *src/components/menu/size-point.jsx*. Pro

Velikost dílku v rozmezí 1 - 4 mm

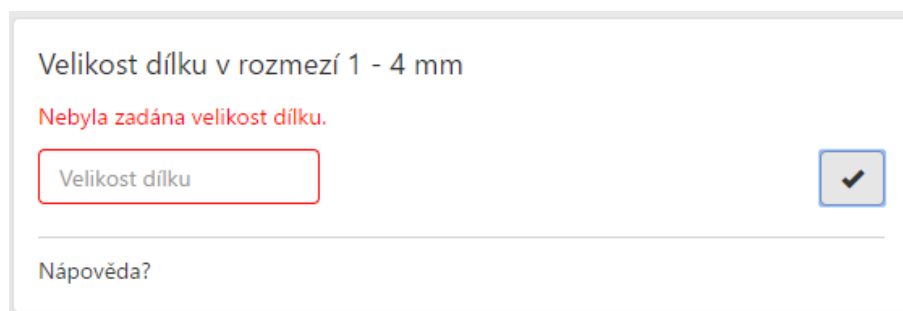
Nápověda?

- Nastavením velikosti dílku se terč rozdělí na dílky definované velikosti.
- Například zvolením velikosti 1 mm, bude terč rozdělen na 341x341 dílků.
- Protože průměr terče je 340 mm a střed soustavy souřadnic je ve středu terče.
- Takže středový dílek bude mít souřadnice (0,0).
- Kladná i záporná osa poté bude rozdělena po 1 mm na 170 dílků.
- Proto počet dílku na jednom řádku bude $170 + 170 + 1(\text{dílek } (0,0))$, tedy 341 dílků.

Obr. 6.2: Komponenta pro zadání velikosti dílku.

normálního uživatele může být nastavení jednotlivých hodnot formulářů všech komponent neintuitivní. Proto každá komponenta obsahuje nápovědu, kde jsou obsaženy základní informace ke každé komponentě a jejich možnosti nastavení. Nápověda se zobrazí po kliknutí myši na nápovědu.

Pro formulář je implementována kontrola zadaných hodnot. Kontrola formuláře je implementována na základě dvou událostí. První událost nastává při kliknutí na tlačítko pro odeslání dat. V tomto případě se kontroluje, zdali vstupní pole formuláře není prázdné. Na obr. 6.3 je zobrazena kontrola formuláře, kdy uživatel nezadal žádnou velikost dílku. V tomto případě je zobrazena informace o prázdném vstupním poli. Druhá událost, kdy je kontrolována zadaná hodnota formuláře, nastává v případě, kdy uživatel zadal hodnotu a opustil vstupní pole formuláře. Kontrola formuláře při druhé události tedy nastává ještě před odesláním dat. Jakmile uživatel opustí vstupní pole, tj. klikne mimo toto pole, daná hodnota se zkontroluje a pokud nevyhovuje, tak je nastavena na hodnotu která je správná, tj. 1, 2, 3 nebo 4. Provádí se tedy kontrola, zdali uživatel nezadal hodnotu menší než 1 nebo větší než 4. Důležité je také kontrolovat, aby uživatel nezadal racionální číslo, tj. číslo s desetinnou čárkou. V tomto případě je číslo zaokrouhleno na celé číslo. Pokud uživatel zadá například číslo 1,78 je zaokrouhleno na číslo 2.



Obr. 6.3: Kontrola zadané hodnoty pro velikost dílku.

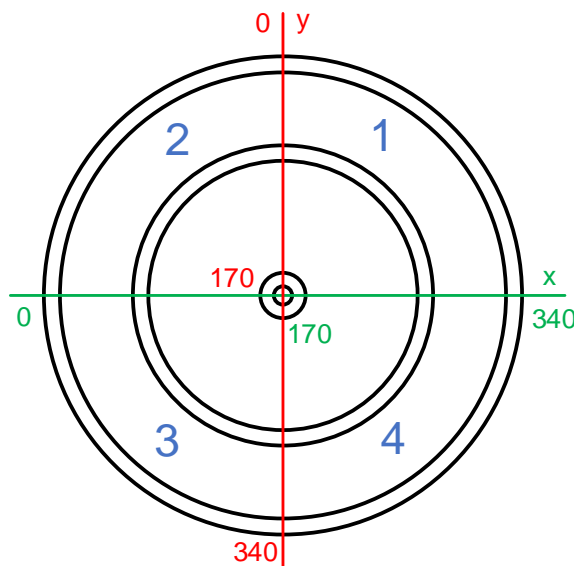
Kontrola formuláře při druhé události by se mohla provádět až v rámci kódu a byla by tak pro uživatele skryta. Uživatel by například zadal číslo 8, ale v rámci aplikace by se pak počítalo s číslem 4. Proto je vhodné kontrolu provádět ještě před odesláním dat, aby uživatel byl informován o tom, s jakou konkrétní hodnotou se bude v rámci aplikace počítat.

Pokud je hodnota zadaná správně, provede se rozdělení terče na dílky definované velikosti. Pro uložení bodových hodnot terče byla zvolena datová struktura typu dvourozměrného pole, která je pro tento příklad nejvhodnější. Bodové hodnoty terče se ukládají do pole pod indexy, které korespondují souřadnicím jednotlivých

dílků. Dané pole pak tvoří pomyslnou matici bodových hodnot terče. Ve výpočtu dvourozměrné diskrétní konvoluce pak zastupuje matici \mathbf{A} , viz kap. 5.4.

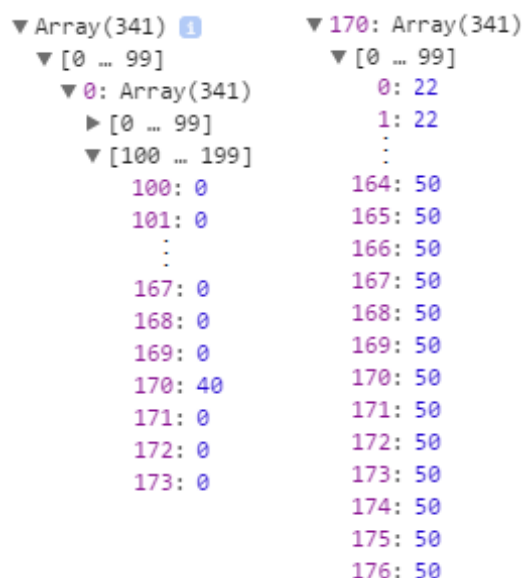
Jak bylo uvedeno v návrhu rozdělení terče na dílky (viz kap. 5.1), jeden z dílků leží vždy svým středem ve středu kartézské soustavy souřadnic, tj. na souřadnicích $(0,0)$. V rámci kódu tyto souřadnice označují indexy pole bodových hodnot $(170, 170)$. Kdyby byly použity záporné indexy pole, výpočet by trval mnohem déle, protože JavaScript dané indexy do pole ukládá od 0-tého indexu. Takže například indexy od -1 do 1 by do pole uložil v pořadí 0 1 -1. Záporné indexy se tedy uloží až za kladné a při výpočtu se musí projít celé pole, dokud se nenarazí na daný záporný index. Proto jsou v rámci kódu zvoleny jen kladné indexy. Jedná se pouze o indexy kvůli vyhledávání v datové struktuře. Hodnoty pro výpočty zůstávají stejné.

Aby byla dodržena podmínka, kdy jeden z dílků leží ve středu kartézské soustavy souřadnic pro jakékoliv definování velikosti dílku, muselo se pole plnit po jednotlivých kvadrantech kartézské soustavy souřadnic. Kdyby se pole plnilo od indexu 0 a byla zvolena velikost hrany dílku 4 mm, pak by žádný z dílků neměl souřadnice $(170, 170)$. Dílky by měly souřadnice $(168, 168)$ a dále $(172, 172)$. Proto v kódu jsou implementovány 4 cykly, které naplní pole po kvadrantech terče od 1. kvadrantu po 4. kvadrant, jak je znázorněno na obr. 6.4. Podle návrhu rozdělení terče na dílky (viz kap. 5.1) se při plnění pole v každém kvadrantu kontrolují podmínky, zdali daný dílek leží v terči a do jakého segmentu patří, aby mu poté byla přidělena daná bodová hodnota v závislosti na jeho souřadnicích.



Obr. 6.4: Kvadranty terče a souřadnice pole v rámci kódu.

Pro kontrolu je na obr. 6.5 uvedeno několik ukázek pole a jeho hodnot v závislosti na souřadnicích dílku. Například pro souřadnice (170, 0), se jedná o dílek, který leží v segmentu terče o bodové hodnotě 40. Dále při velikosti hrany dílku 1 mm musí být kolem souřadnic (170, 170) v rozsahu šesti hodnot pouze bodová hodnota 50. Terč se při každé změně velikosti dílku přepočítá, aby dílky byly rozděleny podle definované velikosti.

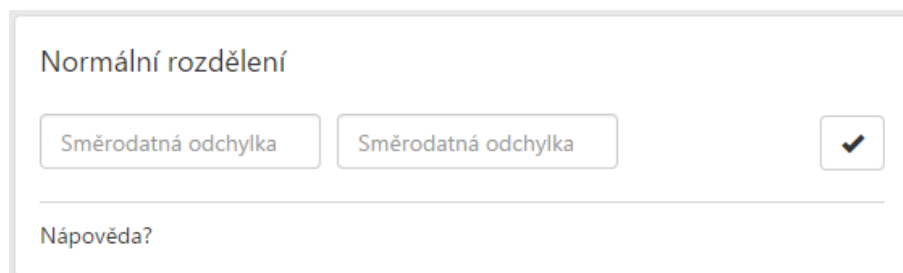


Obr. 6.5: Ukázka pole bodových hodnot terče.

6.2 Definice parametrů dvourozměrného normálního rozdělení

Kód komponenty pro definici parametrů dvourozměrného normálního rozdělení je uveden v souboru `src/components/menu/normal-distribution.jsx`. Komponenta je zobrazena na obr. 6.6. Obsahuje dvě vstupní pole formuláře pro definování směrodatné odchylky náhodné veličiny X a Y . Náhodné veličiny v tomto případě zastupují osu x a y . Podobně jako pro komponentu definice velikosti dílku (viz kap. 6.1) je i zde kontrolována zadaná hodnota. Opět je kontrola aplikována při výskytu dvou stejných událostí jako u předešlé komponenty. Po odeslání dat se tedy kontroluje pouze, zdali uživatel zadal nějakou hodnotu. Formulář odešle data pouze, pokud jsou zadány obě směrodatné odchylky. Kontrola zadané hodnoty se také provádí při opuštění vstupního pole formuláře. Uživatel může zadat nejmenší směrodatnou odchylku, která je rovna 1 mm. Pokud je hodnota menší jak 1 mm, je upravena právě

na hodnotu 1 mm. Maximální velikost směrodatné odchylky je rovna 114. Při této hodnotě obou směrodatných odchylek je maximální velikost normálního rozdělení rovna $6\sigma + 1 = 685$ mm. Velikost je tedy dvojnásobná oproti velikosti terče. Větší hodnotu směrodatné odchylky není nutné definovat.



Obr. 6.6: Komponenta pro definici parametrů dvourozměrného normálního rozdělení.

Parametry pro výpočet dvourozměrného normálního rozdělení se mohou získat definováním směrodatných odchylek pomocí této komponenty. Střední hodnoty a korelace jsou nulové. Může nastat také případ, kdy uživatel zadá vlastní data a parametry budou odhadnuty. Proto algoritmus, který vytvoří pole hodnot dvourozměrného normálního rozdělení, je uveden v souboru *src/components/dart-board/dart-board-calculation.jsx*. Do daného souboru jsou zaslány parametry rozdělení z této komponenty a v případě definování vlastních dat jsou zaslány odhadnuté parametry. Konkrétní způsob, jakým se získá pole normálního rozdělení, je uveden až po implementaci odhadů parametrů v kapitole 6.4.

6.3 Odhad parametrů dvourozměrného normálního rozdělení

Komponenta pro zadání vlastních nastřílených hodů je uvedena na obr. 6.7. Kód komponenty je uveden v souboru *src/components/menu/own-data.jsx*. Komponentu tvoří formulář, který obsahuje dvě vstupní pole, které slouží pro zadání souřadnic hodů daného uživatele. Opět je zde vytvořena kontrola formuláře. Aby byla data odeslána, musí být zadané obě souřadnice. Dále je aplikována kontrola zadané hodnoty po opuštění daného vstupního pole. Kartézská soustava souřadnic je umístěna ve středu terče. Pokud chce tedy uživatel zadat souřadnice středu terče, zvolí souřadnice (0, 0). Kontrola zadané hodnoty se provádí i při zvolené velikosti dílku větší jak 1 mm. Uživatel může zadat jakoukoliv souřadnici pro osu x i y v intervalu

$\langle -170, 170 \rangle$, viz obr. 5.10. Po opuštění vstupního pole formuláře se zadaná souřadnice převede na nejbližší možnou souřadnici, která koresponduje s jedním z dílků terče. Aplikuje se algoritmus popsáný v návrhu odhadu parametrů, viz kap. 5.3.

Obr. 6.7: Komponenta pro zadání vlastních dat.

Pokud jsou souřadnice zadané správně, je možné je odeslat. Při každém odeslání souřadnic se přepočítají střední hodnoty a rozptyly podle vztahů 2.19 a 2.20. Odmocněním daných rozptylů se poté vypočítají směrodatné odchylky. Při zadání první dvojice souřadnic tvoří samotné souřadnice střední hodnoty. Například uživatel zadá jako první souřadnice $(25, -25)$. Střední hodnoty, jak lze odvodit ze vztahu 2.19, jsou pak rovny právě těmto souřadnicím, tj $\mu_x = 25$ mm a $\mu_y = -25$ mm. V návrhu této komponenty (viz kap. 5.3) byl uveden příklad, kdy uživatel odeslal souřadnice svých nastřílených hodů, které jsou uvedeny v tab. 5.3. Z těchto dat byly odhadnuty střední hodnoty $\mu_x = -2$ mm a $\mu_y = 2$ mm. V rámci kódu tyto střední hodnoty odpovídají souřadnicím $(168, 168)$, viz obr. 6.4. Dále byly odhadnuty rozptyly, ze kterých se vypočítaly směrodatné odchylky $\sigma_x = 21,430$ mm a $\sigma_y = 12,497$ mm. Pro kontrolu je uveden na obr. 6.8 výpis z konzole, kde jsou uvedeny dané parametry.

```
Object {meanX: 168, meanY: 168, deviationX: 21.43011899173684,
deviationY: 12.497499749949988, reset: false}
```

Obr. 6.8: Odhadnuté parametry pro data z tab. 5.3.

Komponenta obsahuje také výstupní pole, kde se zobrazuje daná bodová hodnota terče pro zadané souřadnice. Počet zadaných hodnot je indikován pod tímto polem. Dále je v komponentě definované tlačítko pro vynulování parametrů, aby bylo možné souřadnice hodů zadat znovu, pokud dojde k chybě při zadávání. Odhadnuté parametry pak slouží jako vstup pro algoritmus, který vytvoří pole hodnot dvourozměrné normální rozdělení, viz následující kap. 6.4.

6.4 Definice dvourozměrného normálního rozdělení

Algoritmus pro vytvoření matice dvourozměrného normálního rozdělení je uveden v souboru `src/components/dart-board/dart-board-calculation.jsx`. Tato matice tvoří konvoluční masku a ve výpočtu dvourozměrné diskrétní konvoluce zastupuje matici **Z**. Jako datová struktura bylo zvoleno dvourozměrné pole, stejně jako v případě uložení bodových hodnot terče. Na začátku algoritmu se nejdříve rozhodne, pro jaké parametry se dané rozdělení vytvoří. Uživatel má dvě možnosti, jak parametry normálního rozdělení definovat. Pokud nemá žádné vlastní nastřílené hodnoty, zvolí pouze velikosti směrodatných odchylek σ_x a σ_y . Střední hodnoty a korelace zůstanou nulové. Druhá možnost je zadat do aplikace vlastní souřadnice nastřílených hodů. Aplikace pak odhadne parametry normálního rozdělení a pokud nejsou směrodatné odchylky nulové, budou odhadnuté parametry použity pro naplnění pole hodnotami normálního rozdělení. Algoritmus je pro oba případy stejný, pouze se použijí jiné vstupní parametry.

Matice normálního rozdělení bude také rozdělena na dílky o velikosti, která byla nastavena v první komponentě pro definici velikosti dílku. Proto i zde musí být použity čtyři cykly při naplnění pole, aby při jakémkoliv nastavení velikosti hrany dílku byla jedna z hodnot právě střední hodnota. V každém cyklu je nastaven krok 0,1 mm, jak bylo uvedeno v návrhu definice dvourozměrného normálního rozdělení, viz kap. 5.2. Dané hodnoty, které odpovídají kroku velikosti dílku, se vypočítají z okolních hodnot, aby byla dodržena podmínka, že velikost sumy matice normálního rozdělení je přibližně rovna 1.

Z důvodu rychlosti výpočtu jsou záporné indexy pole po naplnění přepočteny na kladné. V levé části obr. 6.9 je uvedeno pole hodnot normálního rozdělení, pro které byly definovány směrodatné odchylky $\sigma_x = 1$ mm a $\sigma_y = 1$ mm a velikost dílku hrany 1 mm. V kódu bude tedy výpočet dvourozměrného normálního rozdělení proveden pro střední hodnoty $\mu_x = 0$ a $\mu_y = 0$, které budou do pole uloženy pod indexy (3, 3). Na daném obr. 6.9 jsou hodnoty normálního rozdělení pro střední hodnoty největší a lze si všimnout i symetričnosti hodnot kolem střední hodnoty. Pro ukázkou je na obr. 6.9 vpravo uvedeno pole pro směrodatné odchylky $\sigma_x = 6$ mm a $\sigma_y = 10$ mm a velikosti hrany dílku 2 mm. Výpočet dvourozměrného normálního rozdělení je opět proveden pro střední hodnoty $\mu_x = 0$ a $\mu_y = 0$, ale výsledek výpočtu normálního rozdělení pro tyto hodnoty je uložen do pole na indexy (18, 30).

```

▼ Array(7) 1
  ► 0: Array(7)
  ► 1: Array(7)
  ► 2: Array(7)
  ▼ 3: Array(7)
    0: 0.002618642534196336
    1: 0.025377040586302742
    2: 0.09674550581008187
    3: 0.14640678838827684
    4: 0.09674550581008187
    5: 0.025377040586302742
    6: 0.002618642534196336
    length: 7
    ► __proto__: Array(0)
  ► 4: Array(7)
  ► 5: Array(7)
  ► 6: Array(7)

▼ 30: Array(37)
  0: 0.00012509971184819691
  2: 0.00031805922290590845
  4: 0.0007243224044026954
  6: 0.0014775151695803428
  8: 0.00269967493259808
  10: 0.004418485114663687
  12: 0.006477689236961504
  14: 0.008506550529390809
  16: 0.01006331094731376
  18: 0.010543506269111054
  20: 0.01006331094731376
  22: 0.008506550529390809
  24: 0.006477689236961504
  26: 0.004418485114663687
  28: 0.00269967493259808
  30: 0.0014775151695803428
  32: 0.0007243224044026954
  34: 0.00031805922290590845
  36: 0.00012509971184819691
  length: 37
  ► __proto__: Array(0)
  ► 32: Array(37)

```

Obr. 6.9: Ukázka pole dvourozměrného normálního rozdělení.

6.5 Výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce

Kód komponenty pro výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce je uveden ve stejném souboru jako algoritmus pro naplnění pole dvourozměrného normálního rozdělení. Komponenta je zobrazena na obr. 6.10. Obsahuje tlačítko, které spustí výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce. Výsledek výpočtu se zobrazí ve výstupním poli označeném jako výsledek konvoluce. Ve výsledku jsou vypsány souřadnice optimálního bodu a bodová hodnota terče tohoto bodu. Pro názornost je výsledek dvourozměrné diskrétní konvoluce také vykreslen spolu s maticí dvourozměrného normálního rozdělení, viz kap. 6.6.

Výpočet

Provést výpočet

Výsledek konvoluce

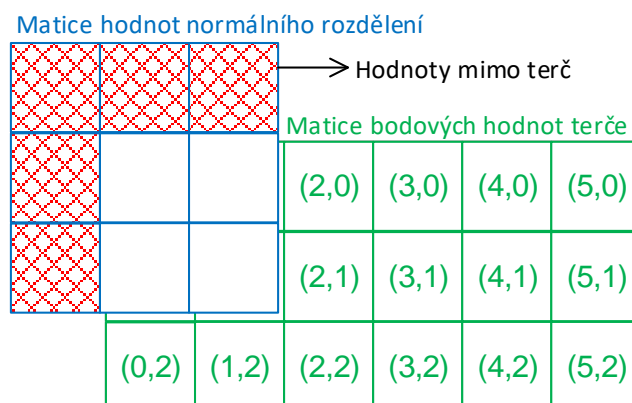
X: -11 Y: 103 Bodová hodnota: 60

Nápověda?

Obr. 6.10: Komponenta pro výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce.

Přehledný postup výpočtu dvourozměrné diskrétní konvoluce byl uveden v návrhu webové aplikace v kapitole 5.4. K výpočtu se použily dvě matice, které v rámci kódu tvoří datová struktura typu dvourozměrného pole. Konkrétně se jedná o matici bodových hodnot terče a matici hodnot dvourozměrného normálního rozdělení. Pokud je matice hodnot dvourozměrného normálního rozdělení vytvořena na základě definovaných směrodatných odchylek v komponentě pro definici parametrů normálního rozdělení, bude aplikován výpočet konvoluce na celý terč, tj. na celou velikost matice bodových hodnot terče. Matice hodnot normálního rozdělení se tedy v prvním kroku vloží svým středem na první řádek a první sloupec matice bodových hodnot terče. Konkrétně při diskretizaci terče na dílky o velikosti hrany 1 mm se střed matice normálního rozdělení vloží na indexy (0, 0) pole bodových hodnot terče. Z důvodu symetrických hodnot normálního rozdělení kolem střední hodnoty, není nutné matici hodnot normálního rozdělení transformovat. Hodnoty matice hodnot normálního rozdělení a hodnoty matice bodových hodnot, které se překrývají, se vynásobí mezi sebou a poté se všechny násobky sečtou. Tím se získá nová hodnota pro indexy pole (0, 0), která je uložena do nového pole. Matice hodnot normálního rozdělení se postupně svým středem posunuje přes všechny sloupce a řádky matice bodových hodnot terče. Nejvyšší hodnota v novém poli pak ukazuje na optimální bod terče.

Pokud je střed matice normálního rozdělení vložen na indexy (0, 0) matice bodových hodnot terče, pak matice normálního rozdělení přesahuje mimo terč. Pro tyto hodnoty, které nejsou definovány, tzn. leží mimo terč, není výpočet konvoluce aplikován. K jednotlivým násobkům hodnot matic, které se překrývají, se pouze přičte hodnota 0. Překrytí matic je znázorněno na obr. 6.11.

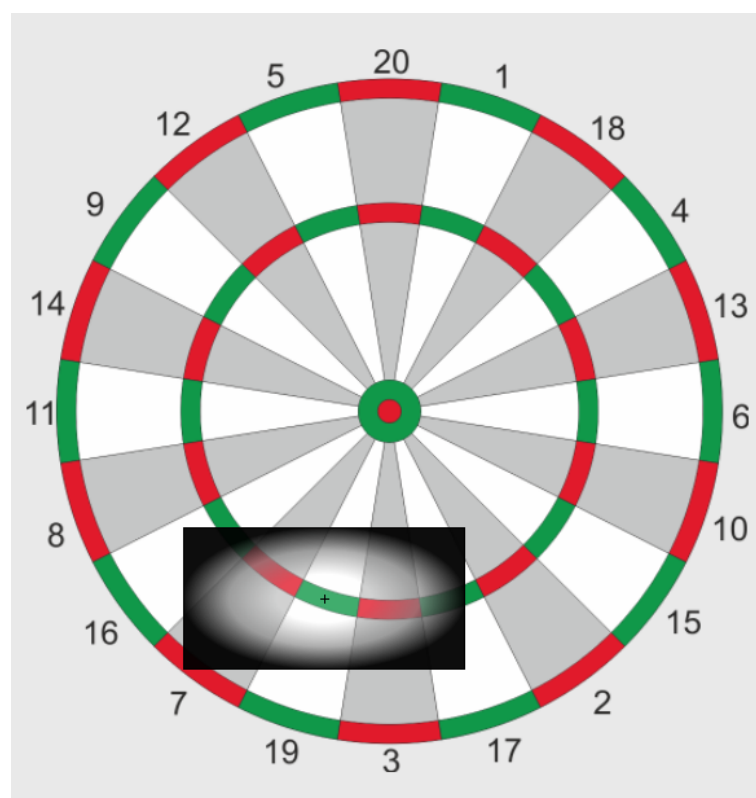


Obr. 6.11: Ukázka překrytí matic při výpočtu dvourozměrné diskrétní konvoluce.

Jiná situace nastává, pokud je matice hodnot normálního rozdělení vytvořena na základě odhadnutých parametrů. V takovém případě se výpočet konvoluce aplikuje jen na část matice bodových hodnot terče. Například pokud jsou odhadnuté střední hodnoty rovny $\mu_x = -2$ mm a $\mu_y = 2$ mm, které v rámci kódu odpovídají souřadnicím (168, 168) a vypočítané směrodatné odchylky rovny $\sigma_x = 21,430$ mm a $\sigma_y = 12,497$ mm z odhadnutých rozptylů, pak interval hodnot normálního rozdělení ve směru osy x je $\langle 104, 232 \rangle$ a ve směru osy y $\langle 131, 205 \rangle$. Z pole bodových hodnot terče se získá nové pole, které je definované právě pro výše uvedené intervaly. Jak už bylo uvedeno, neměly by nastat záporné indexy kvůli rychlosti výpočtu. Proto se indexy pole hodnot normálního rozdělení zvětší o hodnotu 3σ . Takže reálné indexy pole hodnot normálního rozdělení pro daný příklad budou ve směru osy x $\langle 168, 296 \rangle$ a ve směru osy y $\langle 168, 242 \rangle$. Výpočet konvoluce se poté aplikuje pouze na nové pole bodových hodnot terče. Postup výpočtu konvoluce je pak stejný jako v předchozí situaci, kdy se matice normálního rozdělení aplikovala na celou matici bodových hodnot terče. Výše uvedené intervaly platí pouze pro rozdělení terče na dílky o velikosti hrany 1 mm.

6.6 Vykreslení terče a optimálního bodu

Poslední komponentu tvoří vykreslení terče spolu s výsledkem konvoluce. Obrázek terče byl vytvořen pro vlastní potřeby, nejedná se o žádný volně dostupný materiál. Kód komponenty je uveden v souboru *src/components/dart-board/dart-board-result.jsx*. Na obr. 6.12 je zobrazeno vykreslení terče a optimálního bodu, který je zastoupen symbolem kříže. Vykreslena je také matice hodnot dvourozměrného normálního rozdělení. Jak bylo uvedeno v kapitole 2.4.1, hodnoty vzdalující se od střední hodnoty normálního rozdělení, tj. od středu matice, se vyskytují s menší pravděpodobností. Proto v matici je vytvořen průhledný přechod v závislosti na pravděpodobnostím rozdělení hodnot v matici. Hodnoty u středu matice mají větší pravděpodobnost výskytu a jsou zastoupeny průhlednou barvou, která postupně s klesající pravděpodobností hodnoty vzdalující se od středu matice přechází v barvu černou. Průhledný přechod tak znázorňuje, kam by měl hráč mířit.



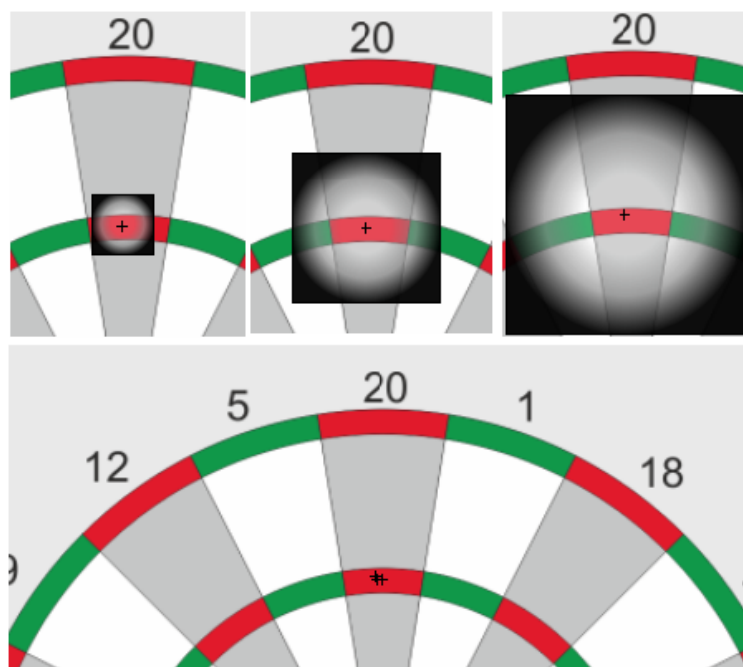
Obr. 6.12: Vykreslení výsledku výpočtu optimálního bodu terče pro parametry normálního rozdělení $\mu_x = \mu_y = 0$, $\sigma_x = 24$ mm a $\sigma_y = 12$ mm.

7 ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

V této kapitole jsou uvedeny výsledky určení optimálního bodu pro definované směrodatné odchylky uživatelem. Tyto výsledky jsou srovnány s výsledky práce [19]. Dále jsou uvedeny výsledky určení optimálního bodu na základě souřadnic nastřílených hodů daného uživatele. Nakonec se kapitola zabývá výpočetní a časovou náročností.

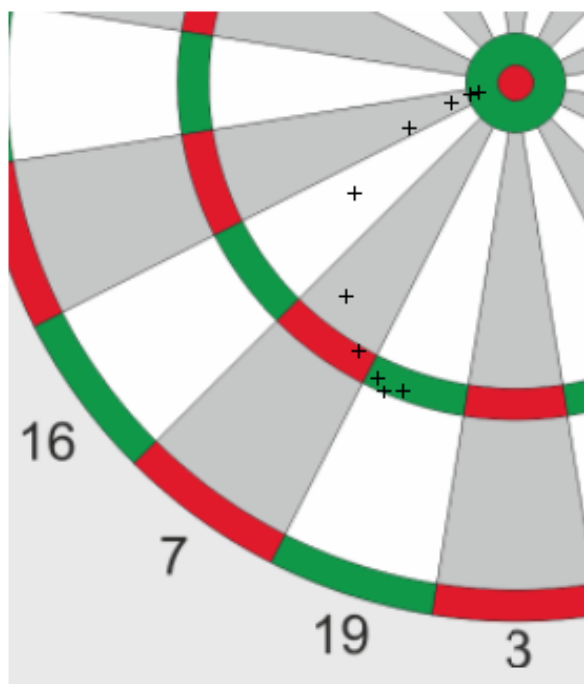
7.1 Určení optimálního bodu na základě definovaných směrodatných odchylek

Po implementaci webové aplikace byly provedeny testy, kdy se postupně zvětšovaly směrodatné odchylky σ_x a σ_y . V každém kroku byly směrodatné odchylky nastaveny na stejnou hodnotu, tzn. $\sigma_x = \sigma_y$. Z jednotlivých testů této práce [19] lze vyhodnotit, že pokud jsou směrodatné odchylky σ_x a σ_y menší jak 17 mm, pak se výsledný optimální bod nachází v segmentu terče o bodové hodnotě 60. Na obr. 7.1 jsou uvedeny výsledky konvoluce pomocí webové aplikace. Uvedeny jsou tři výsledky pro různé velikosti směrodatných odchylek za podmínky $\sigma_x = \sigma_y$. Konkrétně se jedná o hodnoty $\sigma_x = 4$ mm, $\sigma_x = 10$ mm a $\sigma_x = 16$ mm.



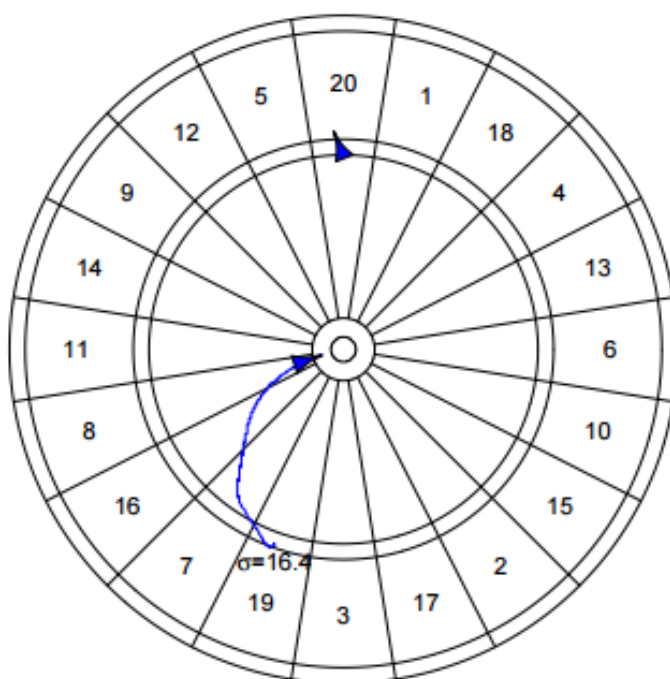
Obr. 7.1: Výsledky výpočtu optimálního bodu pro $\sigma_x < 17$ mm a $\sigma_y < 17$ mm.

Pokud budou směrodatné odchylky $\sigma_x > 17$ mm a $\sigma_y > 17$ mm, bude optimální bod se stoupajícími odchylkami směřovat po křivce od segmentu terče o bodové hodnotě 57 směrem ke středu terče na bodovou hodnotu 25. Pomocí webové aplikace byl proveden výpočet pro deset různých hodnot směrodatných odchylek, které byly v intervalu $\langle 17, 113 \rangle$. Výsledek je zobrazen na obr. 7.2. Směrodatné odchylky byly opět nastaveny na stejné hodnoty. Všechny testy byly provedeny při definované velikosti hrany dílku 1 mm.



Obr. 7.2: Výsledky výpočtu optimálního bodu pro $\sigma_x > 17$ mm a $\sigma_y > 17$ mm.

Na obr. 7.3 jsou znázorněny výsledky určení optimálního bodu terče. Tento obrázek je převzat z doporučené literatury [19], kde k určení optimálního bodu byla použita rychlá Fourierova transformace. Z výsledků práce [19] lze vyhodnotit, že pokud jsou směrodatné odchylky σ_x a σ_y menší jak 16,4 mm, pak výsledný optimální bod je v segmentu terče o bodové hodnotě 60. Pokud budou směrodatné odchylky $\sigma_x > 16,4$ mm a $\sigma_y > 16,4$ mm, bude optimální bod se stoupajícími odchylkami směřovat po křivce od segmentu terče o bodové hodnotě 57 směrem ke středu terče na bodovou hodnotu 25. Stejných výsledků bylo dosaženo i v této práci.



Obr. 7.3: Zobrazení výsledků pro určení optimálního bodu, viz [19].

7.2 Určení optimálního bodu na základě zadaných souřadnic hodů

Pro kontrolu je uveden názorný příklad. Uživatel zadá souřadnice svých nastřílených hodů, které jsou uvedeny v tab. 7.1. Z těchto hodnot lze jednoduchou úvahou

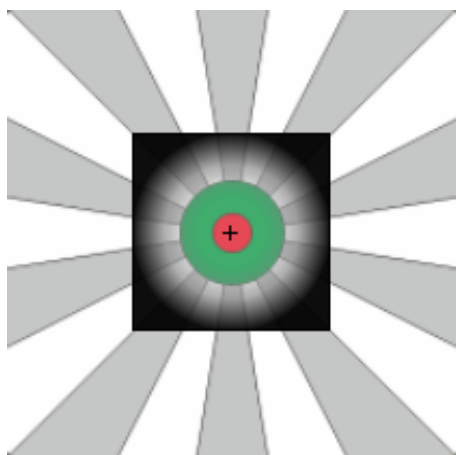
Tab. 7.1: Příkald souřadnic nastřílených hodnot.

číslo hodu	x [mm]	y [mm]	bodová hodnota
1.	10	10	25
2.	10	-10	25
3.	-10	10	25
4.	-10	-10	25

vyjádřit střední hodnoty $\mu_x = 0$ a $\mu_y = 0$. Pro rozptyly poté platí:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 = \frac{100 + 100 + 100 + 100}{4} = 100 \text{ mm}^2,$$

Směrodatné odchylky jsou tedy $\sigma_x = 10$ mm a $\sigma_y = 10$ mm. Dané odhadnuté parametry byly ověřeny pomocí webové aplikace. Indexy pole hodnot dvourozměrného normálního rozdělení jsou $\langle 170, 230 \rangle$ s krokem podle definované velikosti dílku. Je nutné nezapomínat na zvětšení indexů o hodnotu 3σ , aby nedošlo k existenci záporných indexů pole. Normální rozdělení je tvořeno hodnotami z intervalu $\langle -30, 30 \rangle$. Z pole bodových hodnot terče se získá pole nové, které je tvořeno hodnotami, které leží na souřadnicích definovaných intervalem $\langle 140, 200 \rangle$. Výsledek konvoluce a určení optimálního bodu je zobrazeno na obr. 7.4. Optimálním bodem je střed terče, tedy dílek o souřadnicích $(0, 0)$.



Obr. 7.4: Vykreslení optimálního bodu pro odhadnuté parametry normálního rozdělení z hodnot uvedených v tab. 7.1.

7.3 Výpočetní a časová náročnost výpočtu optimálního bodu

Jak bylo uvedeno, JavaScript běží na klientovi, tj. na prohlížeči spuštěném na daném zařízení. Výpočty v rámci této práce jsou prováděny na osobním počítači Lenovo ThinkPad E531 s procesorem Intel Core i7-3632QM, který má vysokou výpočetní kapacitu. Samotný výpočet konvoluce je časově velmi náročný. Například pokud matice bodových hodnot obsahuje 341 hodnot a matice hodnot normálního rozdělení obsahuje 685 hodnot, pak je nutné provést $341 \cdot 341 \cdot 685 \cdot 685 = 54\,561\,952\,225$ výpočtů. Doba trvání výpočtu pro tyto rozměry matic je rovna 4 minuty a 15 sekund. Pokud se použije například velikost hrany dílku 4 mm, pak se výpočetní náročnost velice sníží. Pro danou velikost hrany dílku bude výpočetní náročnost rovna $85 \cdot 85 \cdot 171 \cdot 171 = 211\,266\,225$ výpočtů. Výpočet pak trvá pouhé 2 sekundy. Jedná

se o obrovský výpočetní rozdíl. Velký časový rozdíl nastane už při zmenšení matice normálního rozdělení například na polovinu. Doba výpočtu je pak 1 minuta a 26 sekund pro velikost hrany dílku 1 mm.

Jak bylo uvedeno v kapitole 4.3.1, výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce je možné urychlit aplikováním FFT algoritmu. Bohužel během návrhu a implementace aplikace se nepodařilo nalézt žádnou vhodnou implementaci algoritmu FFT.

8 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo vytvoření webové aplikace pro určení optimálního bodu při střelbě na terč automatickým nastavením parametrů normálního rozdělení pomocí vložení testovacích výsledků hodů daného uživatele. Aby bylo možné tohoto cíle dosáhnout, bylo nutné v první řadě nastudovat potřebnou teorii, která se danou problematikou zabývá. Teorie se skládá z několika okruhů oboru teorie signálů. Základ tvoří dvourozměrné normální rozdělení, které patří mezi významná spojitá rozdělení. Toto rozdělení určuje pravděpodobnost výskytu dané veličiny. Dále byla probrána teorie konvoluce v jednorozměrném i dvourozměrném prostoru. Poslední problematika potřebná k nastudování byla Fourierova transformace pro diskrétní signály a její rychlá verze algoritmus FFT.

Poté bylo možné začít se samotným návrhem webové aplikace. Při návrhu muselo být vyřešeno rozdělení terče na dílky. Dané rozdělení vyžadovalo ošetření několika podmínek. Ohled musel být brán také na implementaci webové aplikace, aby bylo možné návrh uskutečnit. Návrh webové aplikace také zahrnoval definici dvourozměrného normálního rozdělení, odhad parametrů normálního rozdělení a výpočet dvourozměrné diskrétní konvoluce.

Po dokončení návrhu byla provedena implementace webové aplikace. Při implementaci bylo řešeno několik problémů ohledně programovacího jazyka JavaScript a jeho práce s matematickými operacemi. Nebyla nalezena žádná vhodná knihovna pro implementaci normálního rozdělení nebo výpočtu dvourozměrné diskrétní konvoluce. Zpočátku se počítalo s implementací algoritmu FFT kvůli výpočetní náročnosti konvoluce. Bohužel vhodná implementace pro daný problém nebyla nalezena. Z tohoto důvodu byl výpočet proveden pomocí dvourozměrné diskrétní konvoluce. Po aplikování celé implementace byla provedena kontrola správné funkčnosti aplikace. Podle 7. kapitoly, kde jsou shrnuty výsledky práce, byla funkčnost ověřena. Aplikace určuje správně optimální bod pro vložení vlastních nastřílených hodnot a odhadnutých parametrů normálního rozdělení. Výsledky jsou správné i pro ruční nastavení parametrů normálního rozdělení, jak bylo ověřeno při porovnání výsledků práce [19]. Pouze zadávání hodnot mohlo být řešeno i přes nějaký soubor, který by data zpracoval. Zadávání dat postupně do aplikace může být pro více hodnot pracné. Tohoto nedostatku si je autor práce vědom.

LITERATURA

- [1] KIRCHNER, Karel. Šipkový sport - jak a s čím hrát. In: *E-sipky* [online]. Hradec Králové: WebDesign Works, 2014 [cit. 2016-10-24]. Dostupné z: <<http://www.e-sipky.cz/sipkovy-sport-pravidla>>.
- [2] Metodika - rozměry. In: *Sipky* [online]. 2001 [cit. 2016-10-24]. Dostupné z: <http://www.sipky.cz/method/method_size.html>.
- [3] HORNÍČEK, Jan. Optimální korekce nepřesné střelby, bakalářská práce, Brno, FSI VUT v Brně, 2012.
- [4] FAJMON, B., RŮŽIČKOVÁ, I. *MATEMATIKA_3_S.PDF*. Matematika 3. Brno: UMAT FEKT VUT, 2003. s. 1 (s.)
- [5] Vícerozměrné normální rozdělení. In: Matematická biologie [online]. Brno: Masarykova univerzita [cit. 2016-11-15]. Dostupné z: <<http://portal.matematickabiologie.cz/index.php>>.
- [6] Koeficient korelace dvourozměrného normálního rozdělení. In: Matematická biologie [online]. Brno: Masarykova univerzita [cit. 2016-11-15]. Dostupné z: <<http://portal.matematickabiologie.cz/index.php>>.
- [7] Odhady parametrů základního souboru. Multimediální pomůcky na VFU [online]. [cit. 2017-05-11]. Dostupné z: <<http://cit.vfu.cz/stat/fvl/teorie/predn2/odhady.htm>>
- [8] PRŮCHA, Ladislav. MATEMATICKÁ STATISTIKA - XP01MST: Bodové odhady parametrů [online]. [cit. 2017-05-11]. Dostupné z: <<https://math.feld.cvut.cz/prucha/mstp/5pu.pdf>>
- [9] Konvoluce. In: Matematická biologie [online]. Brno: Masarykova univerzita [cit. 2016-11-15]. Dostupné z: <<http://portal.matematickabiologie.cz/index.php>>.
- [10] Diskrétní konvoluce. In: Matematická biologie [online]. Brno: Masarykova univerzita [cit. 2016-11-15]. Dostupné z: <<http://portal.matematickabiologie.cz/index.php>>.
- [11] ZAPLATÍLEK, Karel. VÝPOČET DISKRÉTNÍ KONVOLUCE V PROSTŘEDÍ MATLAB [online]. In: . Univerzita obrany v Brně, 2013, s. 4 [cit. 2016-11-21]. Dostupné z: <<http://www.slaboproudyobzor.cz/files/20130110.pdf>>.

- [12] HORÁK, David. Diskrétní transformace [online]. In: . Západočeská univerzita v Plzni, 2012, s. 89 [cit. 2016-11-19]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/diskretni_transformace.pdf>
- [13] SMĚKAL, Z. Číslicové zpracování signálů. FEKT VUT v Brně, 2012. s. 1-253. ISBN: 978-80-214-4639- 7.
- [14] (Diskrétní) Fourierova transformace [online]. Omlomouc, 2003 [cit. 2016-11-28]. Dostupné z: <<http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf>> Univerzita Palackého v Omlouci.
- [15] ZÁMEČNÍK, Jan. Netradiční metody výpočtu difrakčních jevů v optice, diplomová práce, Brno, FSI VUT v Brně, 2004.
- [16] Rychlá Fourierova transformace (FFT). In: Matematická biologie [online]. Brno: Masarykova univerzita [cit. 2016-11-28]. Dostupné z: <<http://portal.matematickabiologie.cz/index.php>>.
- [17] Pythagorova věta. Matematika.cz [online]. Nová media, 2006 [cit. 2016-12-07]. <Dostupné z: <http://www.matematika.cz/pythagorova-veta>>.
- [18] MAŘÍK, Robert. Inženýrská matematika: Polární souřadnice. Brno, 2007. Mendelova univerzita v Brně.
- [19] R. J. Tibshirani, A. Price and J. Taylor: A statistician plays darts. Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society), 2011.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

DB	Double Bulleyes
DFT	Discrete Fourier transform
DX	rozptyl spojité náhodné veličiny
ES	ECMAScript
EX	střední hodnota spojité náhodné veličiny
FFT	Fast Fourier transform
IDFT	Inverse discrete Fourier transform
IFFT	Inverse fast Fourier transform
$P(A)$	pravděpodobnost náhodné veličiny A
r	vzdálenost od středu soustavy souřadnic, polární souřadnice
SB	Single Bulleyes
UI	User Interface
φ	úhel od vodorovné osy, polární souřadnice
μ	střední hodnota normálního rozdělení
ρ	korelace dvourozměrného normálního rozdělení
σ	směrodatná odchylka normálního rozdělení
σ^2	rozptyl normálního rozdělení
σ_{xy}	kovariance dvourozměrného normálního rozdělení

SEZNAM PŘÍLOH

A	Uživatelské rozhraní aplikace	70
B	Obsah přiloženého CD	72

A UŽIVATELSKÉ ROZHRAŇÍ APLIKACE

OPTIMÁLNÍ BOD PŘI STŘELBĚ NA TERČ

Velikost dílku v rozmezí 1 - 4 mm

☒

Nápověda?

Normální rozdělení

☒

Nápověda?

Zadat vlastní data

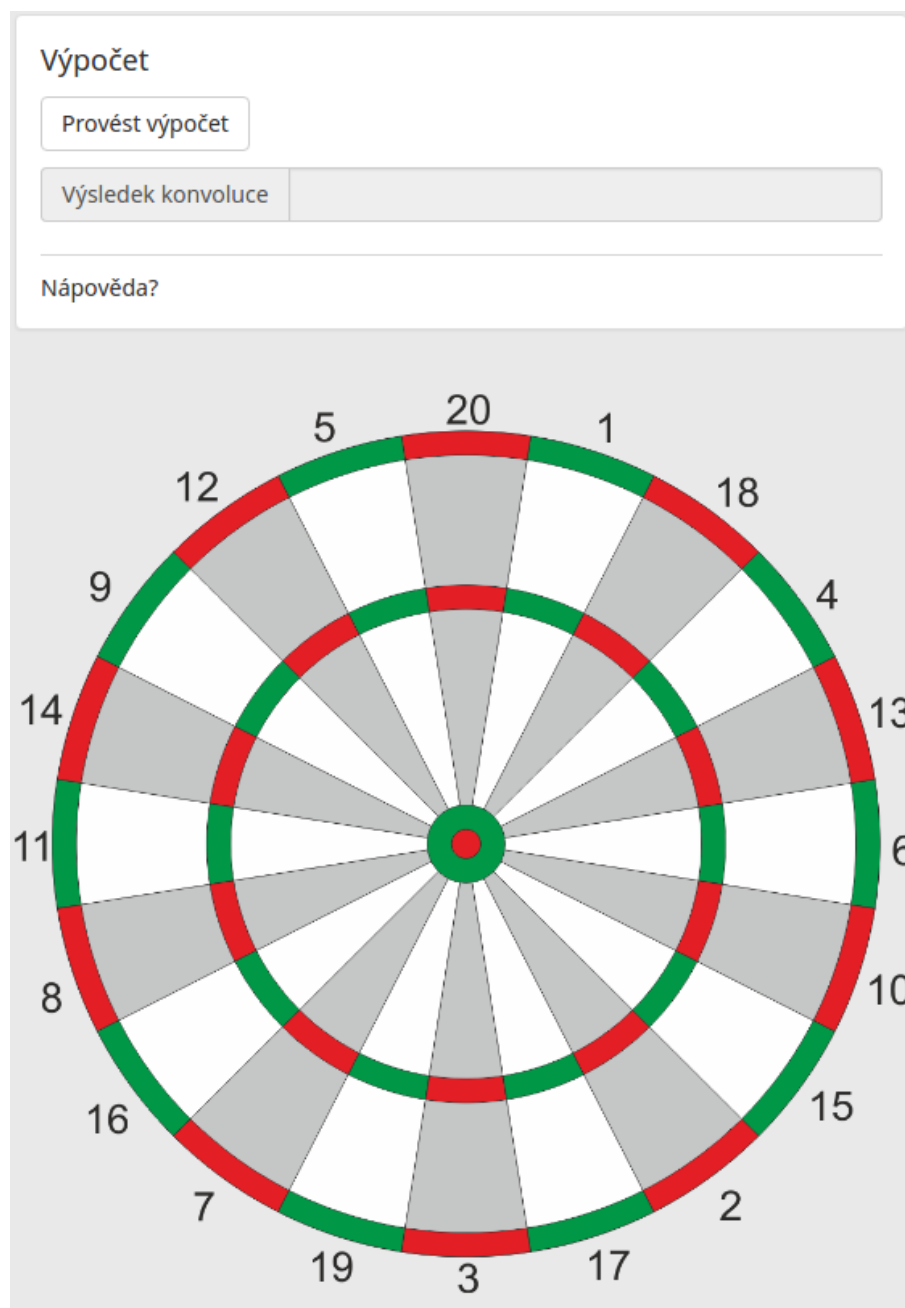
☒

☒

Počet zadaných hodnot: 0

Nápověda?

Obr. A.1: Uživatelské rozhraní aplikace (User interface - UI).



Obr. A.2: Uživatelské rozhraní aplikace (User interface - UI).

B OBSAH PŘILOŽENÉHO CD

Na přiloženém CD lze nalézt následující soubory:

- DP_xmarec13.pdf: elektronická verze této práce,
- složka web_app: obsahuje adresářovou strukturu popsanou v kapitole 6.